Листок 1

15 декабря 2016 г.

Задача 1. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{C}$, Γ конечная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$. Тогда $\mathbb{C}[V]^\Gamma$ совпадает с центром алгебры $\mathbb{C}[V]\#\Gamma$.

Задача 2. Любой слой расслоения Прочези является регулярным представлением группы S_n.

Задача 3. Алгебра Вейля (над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики) не расщепима как алгебра Азумаи.

Задача 4.

a) Пусть A – ассоциативная алгебра с 1, и $e \in A$ идемпотент. Докажите, что если $AeA = A$, то функтор $M \mapsto eM : A\text{-mod} \to eAe\text{-mod}$ является эквивалентностью.

b) Пусть V – симплектическое векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V)$ – конечная подгруппа. Докажите, что $W(V)\#\Gamma$ и усредняющий идемпотент $e \in \mathbb{C}\Gamma$ удовлетворяют условиям пункта a).

c) Докажите аналогичное утверждение в случае алгебры Вейля над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики $\gg \dim V$.

Задача 5. Пусть $\mathcal{A}$ – фильтрованная ассоциативная алгебра. Тогда гомологическая размерность алгебры $\mathcal{A}$ не превосходит гомологической размерности алгебры $\mathrm{gr}\,\mathcal{A}$.

Задача 6. Пусть X – нормальное алгебраическое многообразие, которое проективно над аффинным многообразием X^0. Предположим, что на X, X^0 заданы действия тора $\mathbb{F}^\times$ ($\mathbb{F}$ – основное поле), так что алгебра $\mathbb{F}[X^0]$ положительно градуирована. Пусть, далее $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ – когерентные пучки на X, где $\mathcal{G}$ градуированный, а $\mathcal{F}$ – фильтрованный с отделимой фильтрацией и $\mathrm{gr}\,\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Предположим, наконец, что $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ для всех $i > 0$. Тогда $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для $i > 0$, и $\mathrm{gr}\,H^0(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{G})$.