Листок 2

15 декабря 2016 г.

Задача 1. Пусть X – гладкое алгебраическое многообразие, снабженное симплектической формой ω, и пусть задано гамильтоново действие G с отображением моментов $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$. Докажите, что

a) $\mu^* : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}[X]$ – гомоморфизм алгебр Ли.

b) $\operatorname{im} d_x\mu = \{\beta \in \mathfrak{g}^* | \beta|_{\mathfrak{g}_x} = 0\}$, $x \in X$.

c) $\ker d_x\mu$ совпадает с косо-ортогональным дополнением к T_xGx в T_xX.

Задача 2. Пусть G действует свободно на $\mu^{-1}(0)$ (и X аффинно), и $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow X, \pi : \mu^{-1}(0) \twoheadrightarrow \mu^{-1}(0)/\!/G$. Тогда существует единственная форма $\underline{\omega}$ на $\mu^{-1}(0)/\!/G$ с $\pi^*\underline{\omega} = i^*\omega$. Более того, эта форма симплектическая, а соответствующая скобка Пуассона совпадает со скобкой на редукции.

Задача 3. Пусть $U = \operatorname{End}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathbb{C}^n$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и $\mu : (A, B, i, j) \mapsto [A, B] + ij$ – отображение моментов для действия G на $U \oplus U^*$. Для $k = 0, \ldots, n$, обозначим через Y_k подмножество в $\mu^{-1}(0)$, состоящее из всех (A, B, i, j), где A имеет n различных значений, $\dim \mathbb{C}[A]i = k, \dim j\mathbb{C}[A] = n-k$. Докажите, что Y_k неприводимо, и $\mu^{-1}(0) = \bigcup_k \overline{Y_k}$.

Задача 4. Пусть G – алгебраическая группа, действующая линейно на векторном пространстве U. Предположим, что $\operatorname{codim}_{U\oplus U^*} \mu^{-1}(0) = \dim G$. Тогда присоединенный градуированный идеал к $D(U)\{\xi_U - \chi(x)|\xi \in U\} \subset D(U)$ (где χ – некоторый характер $\mathfrak{g}$) совпадает с $\mathbb{C}[U \oplus U^*]\{\xi_U|\xi \in \mathfrak{g}\}$.

Задача 5. Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$ – пространство с перестановочным действием S_n. Тогда Пуассонова алгебра $\mathbb{C}[T^*\mathfrak{h}]^{S_n}$ порождается следующими $n+1$ элементами: $\sum_{\ell=1}^n x_\ell^i \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{S_n}, i = 1, \ldots, n$, и $\sum_{\ell=1}^n y_\ell^2 \in S(\mathfrak{h})^{S_n}$.

Задача 6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, и $\mathfrak{h}$ как выше. Рассмотрим открытые подмножества $\mathfrak{h}^{reg} \subset \mathfrak{h}, \mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ состоящие из элементов в попарно разными (собственными) значениями. Рассмотрим гомоморфизм $\psi : D(\mathfrak{g}^{reg})^G \to D(\mathfrak{h}^{reg})^{S_n}$, построенный как в лекции. Рассмотрим лапласианы $\Delta_\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ и $\Delta_\mathfrak{g} = \sum_{i,j} \partial_{ij}\partial_{ji}$. Тогда

$$\psi(\Delta_\mathfrak{g}) = \Delta_\mathfrak{h} + 2\sum_{i<j} \frac{\partial_i - \partial_j}{x_i - x_j} = \operatorname{Ad}(\delta)^{-1}\Delta_\mathfrak{h}.$$

Здесь $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.