Листок 3

19 декабря 2016 г.

Задача 1. Пусть $U = \mathrm{End}(\mathbb{F}^n) \oplus \mathbb{F}^n$ (здесь $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики p). Проверьте, что для естественного гомоморфизма $\varphi : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(U)$ верно $\varphi(x^{[p]}) = \varphi(x)^{[p]}$.

Задача 2. Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле достаточно большой характеристики. Вывести изоморфизм (в обозначениях лекции) $(D(U)/D(U)\{\xi_U\})^G \xrightarrow{\sim} D(\mathfrak{h})^{S_n}$ из его аналога над $\mathbb{C}$.

Задача 3. Докажите, что в алгебре дифференциальных операторов $D(\mathbb{F})$ верно тождество $(x\partial)^p = x^p\partial^p + x\partial$.

Задача 4. Пусть X – нормальное алгебраическое многообразие, которое проективно над аффинным многообразием X^0. Предположим, что на X, X^0 заданы действия тора $\mathbb{F}^\times$ ($\mathbb{F}$ – основное поле, которое предполагается алгебраически замкнутым), так что алгебра $\mathbb{F}[X^0]$ положительно градуирована. Рассмотрим многообразие $X \times \mathbb{F}$, и пусть $\hbar$ обозначает координату на $\mathbb{F}$. Пусть $M \in \mathrm{Coh}^{\mathbb{F}^\times}(X \times \mathbb{F})$ таков, что умножение на $\hbar$ дает <u>эпиморфизм</u> из M в себя. Докажите, что $M = 0$.

Задача 5.

a) Пусть $(A, \mathfrak{m})$ – полная локальная алгебра, и $\tilde{A}$ – A-алгебра, которая является свободным модулем конечного ранга над A. Пусть P_0 – проективный $\tilde{A}/\tilde{A}\mathfrak{m}$-модуль. Докажите, что существует проективный $\tilde{A}$-модуль P, такой, что $P_0 = P/\mathfrak{m}P$.

b) Докажите, что пополненная алгебра Вейля $\hat{W}(V)$ расщепляется над формальной окрестностью $\hat{V}^{(1)}$, причем расщепляющий модуль можно выбрать S_n-эквивариантным, если $p > n$.[1]

[1] Это можно сделать явно, не пользуясь предыдущим пунктом. Но предыдущий пункт позволяет доказать такое утверждение для любой конечной группы симплектоморфизмов V.