Рац. алг-ы Чередника, Лек 1

1) Опр., баз. св-ва, мотивация

2) Кат-я $\mathcal{O}$

Этингоф–Гинзбург

1.1) Опр-е: W – группа Вейля, $\mathfrak{h}$ – refl.-е представление

$S\subset W$ – мн-во отражений ($\cup$ классов сопр.), $s\in S \rightsquigarrow (\alpha_s,\alpha_s^\vee)$ корень и обратн. корень

Оба опр. с точн. до ±1 и мы част. нормализуем: $\langle\alpha_s,\alpha_s^\vee\rangle=2$

Опр. A – ассоц. алг., Γ кон. группа, $\Gamma\curvearrowright A$ автом-и

$A\#\Gamma = A\otimes\mathbb{C}\Gamma$ (как вект. пр-во), $a_1\otimes\gamma_1\cdot a_2\otimes\gamma_2 = a_1\gamma_1(a_2)\otimes\gamma_1\gamma_2 \rightsquigarrow A,\mathbb{C}\Gamma \hookrightarrow A\#\Gamma$ гомом. алг-р

$\rightsquigarrow S(\mathfrak{h})\#W,\ T(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W$

Алг-а Чередника $H_c\ (=H_c(W)=H_c(W,\mathfrak{h}))$ завис. от парам-а $c: S\xrightarrow{W}\mathbb{C}$

$H_c = T(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W/$ соотн: $[x,x']=[y,y']=0,\ x,x'\in\mathfrak{h}^*,\ y,y'\in\mathfrak{h}$

$$[y,x]=\langle y,x\rangle - \sum_{s\in S} c(s)\langle\alpha_s^\vee,x\rangle\langle\alpha_s,y\rangle s$$

Замеч: Можем опр. $H_c(W)$ для более общ. групп: комплексных отражений

Пример 1: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\curvearrowright \mathfrak{h}=\mathbb{C}: \pm1$ (тип B_1), $W=\{1,s\}$, $x_\bullet\in\mathfrak{h}^*, y_\bullet\in\mathfrak{h}$ с $\langle y_\bullet,x_\bullet\rangle=1$

т.ч. $s, x_\bullet, y_\bullet$ – обр-е, $\alpha:=x_\bullet$, $\alpha^\vee=2y_\bullet$

$$H_c=\mathbb{C}\langle x_\bullet,y_\bullet,s\rangle/(\underbrace{s^2=1,\ sx_\bullet=-x_\bullet s,\ sy_\bullet=-y_\bullet s}_{\text{соотн в } T(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W},\ [y_\bullet,x_\bullet]=1-2cs)\quad (c\in\mathbb{C})$$

Пример 2: $W=S_n$, $\mathfrak{h}=\mathbb{C}^n$ (предст-е перест.). $S=\{(ij)\mid i<j\}$ – один класс сопр. $\rightsquigarrow c\in\mathbb{C}$

Корни $\alpha_{(ij)}=x_i-x_j\in\mathfrak{h}^*$, $\alpha_{(ij)}^\vee=y_i-y_j$, где $x_1\ldots x_n\in\mathfrak{h}^*$, $y_1\ldots y_n\in\mathfrak{h}$ – тавт. базисы

$H_c=\mathbb{C}\langle x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_n\rangle\#S_n/$ $[x_i,x_j]=[y_i,y_j]=0$

$/\ i\neq j: [y_i,x_j]\left(=0-c\sum_{i'<j'}(\delta_{ii'}-\delta_{ji'})(\delta_{ij'}-\delta_{jj'})(i'j')\right)=c(ij)$

$i=j: [y_i,x_i]=1-\sum_{j\neq i}c(ij)$

1.2) Св-ва:

0) $W=\{1\}\rightsquigarrow H=\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (алг. лин. дифф. опер-в с полин. коэфф.)

общ. $W\rightsquigarrow H_0=\mathcal{D}(\mathfrak{h})\#W$

1) $W=W_1\times W_2$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2 \Rightarrow S=S_1\sqcup S_2$, $c=(c^1,c^2)$. Тогда $H_c(W,\mathfrak{h})=H_{c^1}(W_1,\mathfrak{h}_1)\otimes H_{c^2}(W_2,\mathfrak{h}_2)$

2) Градуировка и фильтрации: Если мы положим $\deg \mathfrak{h}^* = 1$, $\deg W = 0$, $\deg \mathfrak{h} = -1 \Rightarrow$
соотн. однородны $\rightsquigarrow$ градуировка на H_c. С другой стороны $\deg \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^* = 1$, $\deg W = 0$
задает фильтрацию на H_c (как и $\deg \mathfrak{h} = 1$, $\deg \mathfrak{h}^* = \deg W = 0$)

3 - основное) базис: соотн. в $H_c \rightsquigarrow$ гомом. $S(\mathfrak{h}^*), \mathbb{C}W, S(\mathfrak{h}) \longrightarrow H_c(W)$
$\rightsquigarrow$ лин. отобр. $S(\mathfrak{h}^*)\otimes \mathbb{C}W \otimes S(\mathfrak{h}) \longrightarrow H_c(W)$ $(a\otimes b\otimes c \to abc)$

Т-ма (Этингоф-Гинзбург: ОД - треуг. разлож-е) это изом-зм

Для д-ва используем гомоморфизм Данкла

$\mathfrak{h}^{reg} := \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{s\in S} \ker \alpha_s = \{y\in\mathfrak{h} \mid W_y = 1\}$

Предл-е: $\exists$ гомом. алгебр $H_c \longrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})\# W$ с
$x\mapsto x$, $w\mapsto w$, $y\longmapsto D_y = \partial_y + \sum_{s\in S}\frac{c(s)\langle\alpha_s,y\rangle}{\alpha_s}(s-1)$ (оп-р Данкла)

Пример: $W=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathfrak{h}=\mathbb{C}$, $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{x}(s-1)$

$[D,x] = [\frac{\partial}{\partial x}, x] + \frac{c}{x}[(s-1),x] = 1 + \frac{c}{x}(sx - xs) = 1 - \frac{2c}{x}\cdot xs = 1-2cs$

Скетч д-ва (полн. д-во - задача). Надо:

(i) $[D_y, x] = \langle y,x\rangle - \sum_{s\in S} c(s)\langle\alpha_s^\vee, x\rangle\langle\alpha_s,y\rangle s$ - прямое вычисление

(ii) $[D_y, D_{y'}] = 0$ - в обход:

(i) $\Rightarrow [[D_y,D_{y'}],x] = [D_y,[D_{y'},x]] - [D_{y'},[D_y,x]] = 0$ (*)

$\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})\# W \curvearrowright \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}]$

Факт: это действие точное (только нулевой эл-т д-т 0). Дифф. опер-ы локальны, а операторы из W нет, для $\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg}) \curvearrowright \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}]$ это утв. стандартно

$D_y.1 = 0\ \forall y \Rightarrow [D_y,D_{y'}].1 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} [D_y,D_{y'}].\mathbb{C}[\mathfrak{h}] = 0 \Rightarrow [D_y,D_{y'}].\mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}]=0$
$\overset{\text{Факт}}{\Longrightarrow} [D_y, D_{y'}] = 0$ □

Д-во т-мы: сюръекц. -ия соотн-й (можно совмут. x'ы налево, y направо). Инъекц.:
$y_1\dots y_n\in\mathfrak{h}$ - базис, $x_1\dots x_n\in\mathfrak{h}^*$ двойств. базис. Дост. д-ть $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} w D_{y_1}^{e_1}\dots D_{y_n}^{e_n}$ лин
незав. ($w\in W$, $\alpha_i, e_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$). Но символ этого оператора: $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} w (\frac{\partial}{\partial x_1})^{e_1}\dots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{e_n}$.
Символы лин. незав $\Rightarrow$ операторы лин. независимы □

Замеч: Аналогичный аргумент доказывает, что $H_c \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})\#W$ и что
gr H_c (отн. любой из двух фильтраций выше) отождествляется с $S(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W$.

4) H_c^{opp} (против. умнож-е): $H_c^{opp} \xrightarrow{\sim} H_c(W,\mathfrak{h}^*)$: $x\mapsto x$, $y\mapsto y$, $s\mapsto s$ ($w\mapsto w^{-1}$ и роли $\mathfrak{h},\mathfrak{h}^*$ меняются)

1.3) Мотивации

$e = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w \in \mathbb{C}W$ - "усредн-й идемпотент"

$\rightsquigarrow eH_c e \subset H_c$ замкн. отн. умн-я с единицей e (сферическая РАЧ)

$gr(eH_c e) = [e$ идемп. степени $0] = e(gr H_c)e = e\, S(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W)e$

$= S(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)^W$ - градуир. алг-а Пуассона, а $eH_c e$ - её фильтр. квант-е. На самом деле, любое фильтр. квант-е получ. таким образом (И.Л. 2016)

Также $eH_c e$ связана с вполне интегрируемыми квантовыми системами

$H_c \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})\#W \rightsquigarrow eH_c e \to e(\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})\#W)e = \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})^W$

W-инв. симм. ф-ма $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{h} \rightsquigarrow$ квадр. эл-т $\Delta_{\mathfrak{h}} \in S(\mathfrak{h})^W$. Его образ, по сути квант. гамильт-н Ольшанецкого-Переломова, а образ $S(\mathfrak{h})^W$ (коммутативна!) дает полную интегрируемость

2) Категория $\mathcal{O}$

2.1) Источник вдохновения от ТП: $\mathfrak{g}$ - п/прост. алг. Ли $/\mathbb{C}$, треуг. разлож.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^+ \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{t})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ и ТП категория $\mathcal{O}$

$\mathcal{O} = \{M \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\text{-mod} \mid M$ кон. порожд. $/\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, $\mathfrak{n}^+ \curvearrowright M$ лок. нильп., $\mathfrak{t} \curvearrowright M$ диагонализ.$\}$

У $\mathcal{O}$ богатая стр-ра: модули Верма $(\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}^+)$

$\Delta(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}\mathbb{C}_\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{t}^* (= Irr(\mathcal{U}(\mathfrak{t})))$, $\mathfrak{b} \curvearrowright \mathbb{C}_\lambda$: $\mathfrak{t}$ через λ, $\mathfrak{n}^+$ нулем

$\forall \lambda\ \exists!$ непр. фактор $L(\lambda)$ у $\Delta(\lambda)$, и это дает классиф-ю простых объектов в $\mathcal{O}$. Более того, на $\mathfrak{t}^* = Irr(\mathcal{O})$ можно ввести частичн. порядок, к-й задает стр-ру категории старшего веса (мы это обсудим позже). На самом деле, все это имеет смысл для H_c, а отправная точка: треуг. разложение $H_c = S(\mathfrak{h}^*)\otimes\mathbb{C}W\otimes S(\mathfrak{h})$

2.2) Определение, модули Верма и их структура

$\mathcal{O}_c = \{M \in H_c\text{-mod} \mid M$ кон. пор. $/ S(\mathfrak{h}^*)$ & $\mathfrak{h} \curvearrowright M$ лок. нильп.$\}$ ($\mathbb{C}W$ автом. д-т полупр.) - абелева кат-я.

Пример (модули Верма) $\tau \in Irr(W) \rightsquigarrow S(\mathfrak{h})\#W \curvearrowright \tau$ ($\mathfrak{h}$ д-т 0) $\rightsquigarrow$

$\Delta_c(\tau) = H_c \otimes_{S(\mathfrak{h})\# W} \tau.$

Лемма: (1) $\mathrm{Hom}_{H_c}(\Delta_c(\tau), M) = \mathrm{Hom}_W(\tau, M^{\mathfrak{h}})$, где $M^{\mathfrak{h}} = \{m \in M \mid \mathfrak{h} m = 0\}$

(2) $\Delta_c(\tau) = S(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau$ (как $S(\mathfrak{h}^*)\# W$-модуль), а д-е $\mathfrak{h}$ задается обобщ. операторами Данкла $D_y^\tau = \partial_y \otimes 1 + \sum_{s\in S} \frac{c(s)\langle\alpha_s, y\rangle}{\alpha_s}(s-1)\otimes s|_\tau$ (первый множитель действует на $S(\mathfrak{h}^*)$, второй на τ). Отм., что $\frac{1}{\alpha_s}(s-1)$ отобр. $S(\mathfrak{h}^*)$ в себя

(3) $\Delta_c(\tau) \in \mathcal{O}_c$

Д-во: (1) $\mathrm{Hom}_{H_c}(\Delta_c(\tau),M) = \mathrm{Hom}_{S(\mathfrak{h})\#W}(\tau, M) = \mathrm{Hom}_W(\tau, M^{\mathfrak{h}})$

(2) Треуг. разл-е $(H_c = S(\mathfrak{h}^*)\otimes S(\mathfrak{h})\#W) \Rightarrow \Delta_c(\tau) \underset{S(\mathfrak{h}^*)\#W}{\simeq} S(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau$. Пусть теперь M — это H_c-модуль $S(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau$ с $y_M = D_y^\tau$ (то, что это H_c-модуль, проверяется как в предлож. о вложении Данкла). Тогда $\tau \subset M^{\mathfrak{h}} \overset{(1)}{\rightsquigarrow}$ гомом. $\Delta_c(\tau)\to M$. Понятно, что он изо

(3) $\Leftarrow$ (2) (D_y^τ понижает степени в $S(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau$ на 1) □

Опишем теперь неприводимые в $\mathcal{O}_c$.

Предложение: У $\Delta_c(\tau)$ есть единств. неприв. фактор, $L_c(\tau)$; $\mathrm{Irr}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(\mathcal{O}_c)$, $\tau \longmapsto L_c(\tau)$

В док-ве нам будет нужен специальный элемент $h\in H_c$ - элемент Эйлера $h = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{s\in S} c(s)s$, где $y_1,\dots,y_n \in \mathfrak{h}$ - базис, и $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{h}^*$ - двойств. базис. Название такое, потому, что для $c=0$ мы получаем $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in D(\mathfrak{h})$ - Эйлеровское вект. поле. А интересен нам h по след. причине

Задача 2: $[h,x]=x$, $[h,w]=0$, $[h,y]=-y$ $(x\in\mathfrak{h}^*, w\in W, y\in\mathfrak{h})$ | Это W-модуль

Для $M\in H_c$-mod через M_λ $(\lambda\in\mathbb{C})$ обозн. собств. пр-во для h с собств. знач. λ.

Для $\tau\in \mathrm{Irr}(W)$, пусть c_τ - константа, к-ой W-инвариантный эл-т $-\sum_{s\in S} c(s)s$ действует на τ. Следующая лемма доказывается непосредственно

Лемма: $\Delta_c(\tau)_\lambda = \begin{cases} S^n(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau, & \text{если } \lambda = c_\tau + n \ (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Д-во предлож-я. Пусть $M\subset\Delta_c(\tau)$ - подмодуль. Лемма показывает, что $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$, где $M_n = M\cap S^n(\mathfrak{h}^*)\otimes\tau$. Т.е. M ~~[illegible]~~ $\neq \Delta_c(\tau) \Leftrightarrow M_0 = 0$. Отсюда, $\exists!$ макс. собств. подмодуль $R\subset\Delta_c(\tau)$ и $L_c(\tau) = \Delta_c(\tau)/R$.

Покажем, что $\forall L \in Irr(\mathcal{O}_c)\ \exists! \tau \mid L = L_c(\tau)$. Отметим $\forall M \in \mathcal{O}_c \Rightarrow M^{\flat} \neq 0$

По (1) лемма $\exists\ \Delta_c(\tau) \to M$, ненулевой. Для $M = L$, получ. $\Delta_c(\tau) \twoheadrightarrow L$.

Покажем $L_c(\tau) \simeq L_c(\tau') \Rightarrow \tau \simeq \tau'$. $L_c(\tau)_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in c_\tau + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отсюда $c_\tau = c_{\tau'}$

Но $L_c(\tau)_{c_\tau} = \tau \Rightarrow \tau \simeq \tau'$ $\square$

Пример ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C}$): $Irr(W) = \{triv, sgn\}$, $c_{triv} = -c$, $c_{sgn} = c$

$$\Delta_c(triv) = \mathbb{C}[x],\quad s x^k = (-1)^k x^k,\quad y . x^k = \frac{\partial}{\partial x} x^k + \frac{c}{x}\left((-1)^k - 1\right) x^k = \begin{cases} k x^{k-1}, & k \equiv 0 \mod 2 \\ (k-2c) x^{k-1}, & k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

$$R^{\flat} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 0, & c \neq \frac{k}{2},\ k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}+1 \Rightarrow L_c(triv) = \Delta_c(triv) \\ R = x^k \mathbb{C}[x], & c = \frac{k}{2} \Rightarrow \dim L_c(triv) = k \end{cases}$$

Аналог. $L_c(sgn) = \Delta_c(sgn)$, если $c \neq -k/2\ (k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}+1)$ и $\dim L_c(sgn) = k$ иначе

Замеч: любой кон. мерный модуль лежит в $\mathcal{O}$ (рассм. весов. разл-е для $\mathfrak{h}$)

2.3) Старшевесовая структура

Напомним, что абелева $\mathbb{F}$-линейная ($\mathbb{F}$-поле) категория $\mathcal{C} \simeq A\text{-mod}$ для кон. мерной ассоц. алг-ы $A \Leftrightarrow$ в $\mathcal{C}$ кон. число простых, достаточно проект-х, и все объекты имеют кон. длину. A именно, $\mathcal{C} \simeq End(P)^{opp}\text{-mod}$, где P проект. генератор

Опр: Старшевесовая стр-ра на $\mathcal{C} \simeq A\text{-mod}$ – это частичный порядок $\leq$ на $Irr(\mathcal{C})$ и набор $\Delta_L \in \mathcal{C}$, $L \in Irr(\mathcal{C})$ (стандартные объекты) т.ч.

(1) $Hom_{\mathcal{C}}(\Delta_L, \Delta_{L'}) \neq 0 \Rightarrow L \leq L'$ и $End_{\mathcal{C}}(\Delta_L) = \mathbb{F}$

(2) Проект. накрыв-е P_L (нерадз. проект. объект с $P_L \twoheadrightarrow L$) допускает эпиморфизм на Δ_L и $\ker[P_L \twoheadrightarrow \Delta_L]$ фильтровано $\Delta_{L'}$, $L' > L$

Задача 3. Показать, что Δ_L однозначно восстанавливается по $\leq$ как проект. накрывающая L в Серровской оболочке $L' \leq L$. Более того, кратность L в $\Delta_L = 1$

Введем на $Irr(W)$ порядок $\leq_c$: $\tau \leq_c \tau' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \tau = \tau' \\ \text{или} \\ c_\tau - c_{\tau'} \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$

Т-ма (Гинзбург–Гэй–Опдам–Рукье) (1) $\mathcal{O}_c \simeq A\text{-mod}$ (A-кон. мерн. ассоц.)

(2) $\mathcal{O}_c$ – старшевес. кат-я отн. $\leq_c$ со стандартными $\Delta_c(\tau)$

Задача 4: Докажите (1) и что $Ext^1(\Delta_c(\tau), \Delta_c(\tau')) \neq 0 \Rightarrow \tau <_c \tau'$

2.4) Конечная длина, весовые разложения и характеры

Предложение: (1) $\forall M \in \mathcal{O}_c \Rightarrow M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_\lambda$ и $\dim M_\lambda < \infty$

(2) M имеет кон. длину.

Д-во: (1) M кон. порожд. $/ S(\mathfrak{h}^*) \Rightarrow$ нетеров. Поэтому для д-ть для ненулевого подобъекта в M и воспользоваться нетеровой индукцией. Но $\exists$ ненулевой гомом. $\Delta_c(\tau) \to M$. Мы уже проверили (1) для $\Delta_c(\tau) \rightsquigarrow$ (1) для любого фактора

(2) следует из того, что кратность $L_c(\tau)$ в $M \leq$ кратность τ в M_{c_τ} $\square$

(1) позволяет определить характер M, $ch_M = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} [M_\lambda] \cdot q^\lambda$, $[M_\lambda]$ - класс в $K_0(W\text{-rep})$

Пример: $ch_{\Delta_c(\lambda)} = q^{c_\tau}[\tau] \cdot \sum_{i=0}^{\infty} [S^i \mathfrak{h}^*] q^i = \dfrac{q^{c_\tau}[\tau]}{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\Lambda^i \mathfrak{h}^*] q^i}$

Задача 5: (1) Отображение $[\tau] \to [\Delta_c(\tau)]$ задает $K_0(W\text{-rep}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{O}_c)$

(2) $ch_M = ch_{M'} \Rightarrow$ классы $[M], [M']$ в $K_0(\mathcal{O}_c)$ совпадают.

Фундамент. задача при изучении $\mathcal{O}_c$ - вычисление характеров $L_c(\tau)$ (или что эквивалентно, их классов в K_0)

2.5) Проективные объекты. Для завершения доказательства теоремы остается доказать, что достаточно проективных объектов и все они допускают Верма-фильтрацию (и тогда $\mathrm{Ext}^1(\Delta_c(\tau), \Delta_c(\tau')) \neq 0 \Rightarrow \tau <_c \tau'$ завершит д-во (2) в определении старшевесовой категории, эта импликация говорит, что Верма в фильтрации всегда упорядочены от меньшего к большему)

Фиксируем $\tau \in \mathrm{Irr}(W)$. Для $k \geq 0$ рассмотрим $M^k = H_c \otimes_{S(\mathfrak{h}) \# W} (\tau \otimes S(\mathfrak{h}) / (\mathfrak{h}^k))$ так что $\Delta_c(\tau) = M^0 \twoheadleftarrow M^1 \twoheadleftarrow M^2 \twoheadleftarrow \ldots$

Лемма: Для $k \gg 0$ у M^k есть проективное прямое слагаемое, накрывающее $L_c(\tau)$

Д-во: У M^k есть два разложения в прямую сумму, согласованные с градуировкой на H_c: "$\mathbb{C}$-градуировка" $M^k = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M^k_\lambda$ (как и у любого модуля из $\mathcal{O}_c$), а кроме того градуировка $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^k(i)$, где для однородных $f \in H_c$, $g \in S(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}^k$ степеней i, j в соответствующих алгебрах, $\deg(f \otimes (v \otimes g)) = i - j$. Они согласованы: $M^k(i) = \bigoplus_\lambda M^k(i) \cap M^k_\lambda$ т.к. h имеет степень 0 и сохраняет все $M^k(i)$. Для $\mu \in \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $M^{k,\mu} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^k(i) \cap M^k_{\mu+i}$ - это подмодуль. Более того, $M^k = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}} M^{k,\mu}$.

Отображение $M^{k+1} \to M^k$ градуировано $\rightsquigarrow$ $M^{k+1,\mu} \to M^{k,\mu}$. Заметим, что $M^{0,c_\tau} = M^0 = \Delta_c(\tau)$. Поэтому $M^{k,c_\tau} \twoheadrightarrow L_c(\tau)$ $\forall k$. Мы утверждаем, что

(а) $\forall \mu$ последовательность $M^{k,\mu}$ стабилизируется

(б) стабильный $M^{k,\mu}$ - проективный

Д-во (а). $0 \to H_c \otimes_{S(\mathfrak{h})\#W} (\tau \otimes S^k\mathfrak{h}) \to M^{k+1} \to M^k \to 0$

$\overset{\shortparallel ?}{\bigoplus_{\tau'}} \Delta_c(\tau')$: $\mathbb{C}$-градуировка $c_{\tau'}$, $\mathbb{Z}$-град-ка $-k$ для τ' $\Rightarrow \Delta_c(\tau') \subset M^{k+1, c_{\tau'}-k}$

$\Rightarrow$ для $k \gg 0$ (т.к. $c_{\tau'} - k \neq \mu$) $M^{k+1,\mu} \xrightarrow{\sim} M^{k,\mu} \rightsquigarrow M^{\infty,c_\tau} := M^{k,c_\tau}$ $(k \gg 0)$

(б) $\mathrm{Hom}(M^k, M) = \mathrm{Hom}_W(\tau, M^{\mathfrak{h}^k})$, $M^{\mathfrak{h}^k} = \{m \in M \mid \mathfrak{h}^k m = 0\}$

$\overset{\cup}{\mathrm{Hom}}(M^{k,\mu}, M) \overset{\subseteq}{=} \overset{\cup}{\mathrm{Hom}_W}(\tau, M^{\mathfrak{h}^k} \cap M_\mu) \rightsquigarrow$ равенство

τ в степени 0

$k \gg 0 \Rightarrow M_\mu = M^{\mathfrak{h}^k} \cap M_\mu \Rightarrow \mathrm{Hom}(M^{\infty,\mu}, M) = \mathrm{Hom}(\tau, M_\mu)$

Но $M \mapsto M_{c_\tau}$ - точн. функтор $\Rightarrow M^{\infty,\mu}$ проективный □

Следствие: Проективная накрывающая $P_c(\tau)$ простого $L_c(\tau)$ имеет Верма-фильтрацию.

Д-во: $P_c(\tau) \subseteq_{\oplus} M^{\infty,c_\tau} \subseteq_{\oplus} M^k$ $(k \gg 0)$. Функтор $H_c \otimes_{S(\mathfrak{h})\#W} \bullet$ точный (из треуг. разл-я) $\Rightarrow M^k$ имеет Верма-фильтрацию. Теперь все следует из Задачи 7 □

Задача 7. Если $M_1 \oplus M_2$ имеет Верма-фильтрацию, то то же верно для M_1, M_2

Задача 8. Пусть c общее в том смысле, что $\tau \leq_c \tau' \Rightarrow \tau = \tau'$. Тогда категория $\mathcal{O}_c$ полупроста и $P_c(\tau) = \Delta_c(\tau) = L_c(\tau)$