Лекция 2: KZ functor

1) Локализация и монодромия

2) Алгебра Гекке

3) Св-ва KZ

Локализация

1.1) ~~Разогрев~~ $\mathcal{O}_0 = \{M \in D(\mathfrak{h})\#W\text{-mod} \mid M$ кон. пор., $\mathfrak{h} \curvearrowright M$ лок. нильп.$\}$

Лемма Кашивары (частн. случай) $\mathcal{O}_0(\{1\}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}$, $M \mapsto M^{\mathfrak{h}}$ & $N \mapsto \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes N$

Сл-е $\mathcal{O}_0(W) \xrightarrow{\sim} W\text{-rep}$

Хотелось бы обобщить это на произв. c (но функтор не будет эквив-м и правую часть надо заменить...) Для начала оболм другую интерпретацию функтора $\mathcal{O}_0(W) \to W\text{-rep}$, к-ая будет обобщаться на общий параметр ($M^{\mathfrak{h}} \in W\text{-rep}$ $\forall c$, но функтор $M \mapsto M^{\mathfrak{h}}$ не имеет хороших св-в). Напомним вложение Данкла $H_c(W) \hookrightarrow D(\mathfrak{h}^{reg})\#W : x \mapsto x, w \mapsto w,$ $y \mapsto D_y = \partial_y + \sum_{s \in S} \frac{c(s)\langle \alpha_s, y\rangle}{\alpha_s}(s-1)$. Оказывается – это гомом локализации. А именно, положим $\delta = \prod_{s \in S} \alpha_s^2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$, нули δ в $\mathfrak{h}$ – это в точности $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}^{reg}$. Рассмотрим пр-во $H_c[\delta^{-1}] = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}] \otimes \mathbb{C}W \otimes S(\mathfrak{h})$

Лемма: На $H_c[\delta^{-1}]$ есть стр-ра алгебры (единств.) т.ч. естеств. $H_c, \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}] \to H_c[\delta^{-1}]$ – это гомом-мы алгебр

Д-во: достаточно объяснить как считать $y \cdot \delta^{-1}$ (так что это эл-т в $H_c[\delta^{-1}]$) Заметим, что $[y, \delta] \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W \Rightarrow$ коммут. с $\delta \rightsquigarrow y \cdot \delta^{-1} = \delta^{-1} \cdot y - [y, \delta]\delta^{-2}$ □

Лемма: $H_c \to D(\mathfrak{h}^{reg})\#W$ – это композиция $H_c \to H_c[\delta^{-1}]$ и изом-ма $H_c[\delta^{-1}] \xrightarrow{\sim} D(\mathfrak{h}^{reg})\#W$

Д-во: из того, что полюса D_y лежат вне $\mathfrak{h}^{reg}$. □

Т.е имеем ф-р $Loc: M \mapsto M[\delta^{-1}] : \mathcal{O}_c(W, \mathfrak{h}) \to \{N \in D(\mathfrak{h}^{reg})\#W\text{-mod} \mid$ N кон. пор. над $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}]\} =: Loc^W(\mathfrak{h}^{reg})$ – категория W-эквив. локальных систем на $\mathfrak{h}^{reg}$. Локальная система – то же самое, что векторное расслоение с плоской связностью: по $\mathrm{Vect} \otimes N \to N$ задаем $\nabla : N \to N \otimes \Omega^1$, и то, что действие Vect уважает коммут-р означает, что ∇ плоская.

1.2) Монодромия Пусть X – гладкое (афф.) алг. мн-е (нас интересует $X = \mathfrak{h}^{reg}$ или скорее $\mathfrak{h}^{reg}/W$)

Можем рассмотреть категорию $Loc(X)$, а также $Loc^{an}(X)$ (то же самое только аналит.) вект. расслоений с плоской связностью. Фиксируем $p \in X$. Имеем эквивалентность $Loc^{an}(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,p)$-rep (кат-я кон. мерных представлений), которая отправляет $N \in Loc^{an}(X)$ в слой N_x с представлением монодромии (мы сделаем несколько вычислений ниже)

Имеем эквив-сть $Loc^W(\mathfrak{h}^{reg}) \xrightarrow{\sim} Loc(\mathfrak{h}^{reg}/W)$, $N \mapsto \pi_*(N)^W$, где $\pi: \mathfrak{h}^{reg} \to \mathfrak{h}^{reg}/W$ (эквив. спуск). Фундаментальная группа $\pi_1(\mathfrak{h}^{reg}/W, p)$ известна как группа кос B_W, ниже мы напомним как она устроена. Получаем функтор $\mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W) \xrightarrow{\widetilde{KZ}} B_W$-rep (композ. $\mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W) \xrightarrow{loc} Loc^W(\mathfrak{h}^{reg}) \xrightarrow[\sim]{\pi_*(\cdot)^W} Loc(\mathfrak{h}^{reg}/W) \xrightarrow{\text{слой}} B_W$-rep). Отметим, что $\widetilde{KZ}$ отправляет M в слой $M_{p'}$, для $p' \in \mathfrak{h}^{reg}$ (разные выборы дают изом. пр-ва)

Вернемся к случаю $c=0$. Имеем эпиморфизм $B_W \twoheadrightarrow W$. Несложно видеть, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_0 \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\widetilde{KZ}"'] & W\text{-rep} \arrow[d] \\
 & B_W\text{-rep}
\end{tikzcd}$$

коммутирует. В общем случае мы отдельно видим похожую картину но фактор $\mathbb{C}B_W \twoheadrightarrow W$ заменится на алгебру Гекке

13) Регулярные особенности: Функтор $Loc(X) \to \pi_1(X,p)$-rep не эквивалентность (уже для $X = \mathbb{A}^1$ легко написать дифур, решения к-ого не полиномиальны). Однако внутри $Loc(X)$ есть полная Серровская подкатегория $Loc_{rs}(X)$ локальных систем с регулярными особенностями т.ч. ограничение $Loc_{rs}(X) \to \pi_1(X,p)$-rep - эквивалентность (Делинь) Мы лишь опишем пример объекта в $Loc_{rs}(X)$ в случае, когда X - открытое афф. подмн-во в $\mathbb{C}^n$. А именно, пусть $N = \mathcal{O}_X \otimes V \in Loc(X) \rightsquigarrow \nabla = d \otimes id_V + A$ с $A \in End(V) \otimes \Omega^1_X$. Тогда $N \in Loc_{rs}(X) \iff A$ имеет полюса порядка ≤ 1 на всех дивизорах в $\mathbb{C}^n \setminus X$, а также на дивизоре ∞: $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) \setminus \mathbb{C}^n$

Пример: $loc(\Delta_c(\tau)) \in Loc_{rs}(\mathfrak{h}^{reg})$ $(\tau \subset \Delta_c(\tau) \rightsquigarrow$ тривиал. $loc(\Delta_c(\tau)))$, $\partial_y|_\tau = -\sum_s \frac{c(s)\langle\alpha_s, y\rangle}{\alpha_s}(s-1)$

$\mathcal{O}_{\mathfrak{h}^{reg}} \otimes \tau$. Поскольку $y \in \mathfrak{h}$ ~~дет на~~ аннул-т $\tau \subset loc(\Delta_c(\tau))$ ~~перед D_y^τ~~ $\Rightarrow$, имеем ~~(а нужн. D_y^τ ...)~~

$A = -\sum_{s \in S} c(s) \frac{d\alpha_s}{\alpha_s}(s-1)$. Она действ. имеет полюса порядка 1 на всех гиперплоскостях $\mathfrak{h}^s$ а также на ∞

Следствие: $\operatorname{im} loc \subset Loc^W_{rs}(\mathfrak{h}^{reg})$ ~~...~~

Д-во: $\forall M \in \mathcal{O}_c$ есть расширение факторов модулей Верма. Поскольку $Loc^W_{rs}(\mathfrak{h}^{reg})$

замкнута отн. подфакторов и расширений, следствие следует из примера $\square$

Более того $\pi(\circ)^W : Loc^W_{rs}(\mathfrak{h}^{reg}) \xrightarrow{\sim} Loc_{rs}(\mathfrak{h}^{reg}/W)$. Поэтому $KZ: \mathcal{O}_c \to B_W\text{-rep}$ — это композиция $Loc: \mathcal{O}_c(W) \to Loc^W_{rs}(\mathfrak{h}^{reg})$ и эквив-и $Loc^W_{rs}(\mathfrak{h}^{reg}) \xrightarrow{\sim} B_W\text{-rep}$

2.1) Опр-е: I — мн-во индексов простых отр-й: $i \in I \leftrightarrow s_i \in W$, m_{ij} := порядок $s_i s_j$

$B_W = \langle T_i, i \in I \rangle / (\underbrace{T_i T_j T_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{T_j T_i T_j \dots}_{m_{ij}} \mid i \neq j)$, T_i с точн. до сопр. — полупетля в $\mathfrak{h}^{reg}$ (180°) вокруг $\alpha_i = 0$ $\rightsquigarrow$ петля в факторе $\mathfrak{h}^{reg}/W$.

$B_W \xrightarrow[/T_i^2=1]{} W \quad (T_i \mapsto s_i)$

Алгебра Гекке $\mathcal{H}_q(W)$ зависит от парам-а $q = (q_i)_{i \in I} \in (\mathbb{C}^\times)^I$ т.ч. $q_i = q_j \Leftarrow i \sim_W j$ (напр. для S_n: q одно компл. число), $\mathcal{H}_q(W) := \mathbb{C}B_W / ((T_i - 1)(T_i + q_i) = 0,\ i \in I)$ так что $\mathcal{H}_1(W) = \mathbb{C}W$.

Факт: $\dim \mathcal{H}_q(W) = |W|$ (так что $\mathcal{H}_q(W)$ — плоск. деформ-я $\mathbb{C}W$) $\rightsquigarrow$ базис T_w $(w \in W)$

Т-ма (ГГОР) Пусть $q_i = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\, c(s_i))$. Тогда $\operatorname{im} \widetilde{KZ} \subset \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$ $(\subset \mathbb{C}B_W\text{-rep})$

~~(с точн. до перенорм-и T_i)~~

2.2) Вычисление монодромии — прил. занятия по ОДУ/компл. анализу.

Д-во теоремы основано на вычислении представления монодромии для $\widetilde{KZ}(\Delta_c(\tau)) \simeq \tau$. Поэтому мы попрактикуемся в вычислении монодромии для всяких плоских связностей $(\mathcal{N}, \nabla)$

Пример 0: $d + \frac{A}{z} dz$ на $\mathbb{C}^\times$: решение соотв. диф-ура — многозначн. ф-ция z^{-A}

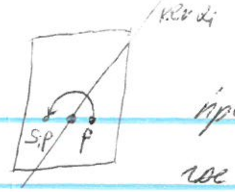
Монодромия вокруг 0: $\exp(-2\pi\sqrt{-1}A)$ (A — матрица)

Пример 1: $d + \frac{A(z)}{z} dz$ ($A(z) \in Mat_n(z)$ — голом. ф-ция). Факт: монодромия $= \exp(-2\pi\sqrt{-1}A(0))$ (регул. часть не влияет на монодромию)

Пример 2: $d + \frac{A(z)}{z} dz$ — $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ экв-ая связность на $\mathbb{C}^\times$. Хотим монодромии для экв-й спуска на $\mathbb{C}^\times/\mathbb{Z}_2$. Это то же самое что монодромия для полупетли в $\mathbb{C}^\times$ и умн. на -1 (отожд-е $\mathcal{N}_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{-p}$); ответ: $-\exp(-\pi\sqrt{-1}A(0))$

Пример 3: $d + A$ — W-экв-ая связность на $\mathfrak{h}^{reg}$ где A — матр. с полюсами первого порядка на $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}^{reg}$ ($A \in End(V) \otimes \Omega^1_{\mathfrak{h}^{reg}}$). Вычислим д-е T_i с точн. до сопр.

Выберем общ. точку вблизи ker α_i и трансв. прямую к ker α_i



при ограничении на эту прямую связь имеет вид $\frac{\mathrm{Res}_{\ker\alpha_i} A}{\alpha_i} d\alpha_i + \ldots$ где ... означает регулярные члены. Матрица монодромии поэтому — $s_i \exp(-\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{res}_{\ker\alpha_i} A)$.

Предл.: $(T_i-1)(T_i+q_i)=0$ на $\widetilde{KZ}(\Delta_c(\tau))$

Д-во: $V=\tau$, $A=-\sum_{s\in S} c(s)\frac{d\alpha_s}{\alpha_s}(s-1) \Rightarrow \mathrm{res}_{\ker\alpha_i} A=-c(s_i)(s_i-1)$. Т.е. оп-р монодромии — это $B=s_i\exp(\pi\sqrt{-1}\,c(s_i)(s_i-1))$. Но $s_i^2=1$. Если $s_iv=v$, то $Bv=v$. Если $s_iv=-v$, то $Bv=-q_iv$.
$\Rightarrow (B-1)(B+q_i)=0$. □

~~Замеч. $T_i \mapsto T_i(V_i)$ опр. автоморфизм $H_q(W)$~~

2.3) Δ-Со теорема. Отм., что $\widetilde{KZ}$ точн. функтор

Случай 1: c общ. $\Rightarrow [\tau\le_c\tau' \Rightarrow \tau=\tau'] \Rightarrow$ любой $M\in\mathcal{O}_c$ есть $\bigoplus_\tau \Delta_c(\tau)^{\oplus ?}$ Поэтому $\widetilde{KZ}(M)\in H_q(W)\text{-mod}$ ост. пров. на $M=\Delta_c(\tau)$, это пред. упражн.

Случай 2: произв. c. $\forall M$ — фактор суммы проективных ⟶ дост. проверить $\widetilde{KZ}(M)\in H_q(W)\text{-mod}$ для $M=P_c(\tau)$. Но $P_c(\tau)\hookrightarrow M_c^k=H_c\otimes_{S(\mathfrak h)\# W}(\tau\otimes S(\mathfrak h)/(\mathfrak h^k))$ и дост. пров. для M^k. Но M_c^k образует плоск. семейство по c, т.е. $\widetilde{KZ}(M_c^k)$ — плоское по c модуль над B_W. Это сводит проверку $(T_i-1)(T_i+q_i)\overset{?}{=}0$ к пред. случаю. □

Получаем точн. функтор $KZ:\mathcal{O}_c\longrightarrow H_q(W)\text{-mod}$

2.4) Благородные происхождения алгебр Гекке: $q=p^m$ — степень простого ⟶ $G(q)$ — расщепимая редукт. группа над $\mathbb{F}_q$ ($GL_n(\mathbb{F}_q)$ или $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$), борелевская $B(q)\subset G(q)$ ⟶ разл. Брюа $G(q)=\coprod_{w\in W} B(q)wB(q)$ (W — группа Вейля для G)

$\mathbb{K}$ — поле с $|B(q)|\neq 0$ (для $GL_n(\mathbb{F}_q)$ это озн-т $q\neq 0,1$ в $\mathbb{K}$) $\Rightarrow \mathbb{K}B(q)$ полупр. алг. $\mathrm{End}_{G(q)}(\mathbb{K}[G(q)/B(q)])^{opp}\cong H_q^{\mathbb{K}}(W)$. Рассм. ф-р $M\mapsto M^{B(q)}:\mathbb{K}G(q)\text{-mod}\to H_q^{\mathbb{K}}(W)\text{-mod}$ — точн.

Класс. случай: char $\mathbb{K}=0$: функтор дает биекцию между непр. предст-и $G(q)$ с $B(q)$-инв. вектором и непр-и $H_q^{\mathbb{K}}(W)$-модулями. Если $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, то $H_q^{\mathbb{K}}(W)\cong \mathbb{K}W$.

Модулярный случай: $\mathbb{K}[G(q)/B(q)]$ — проект-й (и инъект.) $\mathbb{K}G(q)$-модуль. Поэтому $M\mapsto M^{B(q)}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}G(q)}(\mathbb{K}[G(q)/B(q)],M)$ — это фактор-функтор (с обратным $\mathbb{K}[G(q)/B(q)]\otimes_{H_q^{\mathbb{K}}(W)}\bullet$)

Опр: Пусть A,B — конечн. алгебры над $\mathbb{K}$. Функтор $\pi: A\text{-mod}\longrightarrow B\text{-mod}$ назыв. фактор-функтором, если он допускает правый обратный и он точный

Задача 1: Доказать, что π-фактор-функтор $\Leftrightarrow \exists$ проект. $P \in A\text{-mod}$ с $B \simeq End_A(P)^{opp}$ и $\pi = Hom_A(P, \bullet)$

Можем говорить о фактор категориях, напр. $A\text{-mod}/\ker \pi$, к-ая отожд. с $B\text{-mod}$ поср. π

3) Π-ва (ГГОР) 1) $KZ(M)=0 \Leftrightarrow M$-кручение над $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ $\{M \in \mathcal{O}_c \mid M\text{-круч. над } \mathbb{C}[\mathfrak{h}]\}$

2) $KZ: \mathcal{O}_c \to \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$ фактор-функтор $\rightsquigarrow \mathcal{O}_c/\mathcal{O}_c^{tor} = \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$, где $\mathcal{O}_c^{tor} = \rangle$

3) KZ строго полный на проективных объектах: $Hom_{\mathcal{O}_c}(P_1, P_2) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{H}_q(W)}(KZ(P_1), KZ(P_2))$

3.1) Д-во 1: По опр., как вект. пр-во $KZ(M) = M_p$ для любого $p \in \mathfrak{h}^{reg}$. Утв. следует

3.2) Д-во 2: Поскольку KZ точный, то есть проективный $P_{KZ} (= P_{KZ,c}) \in \mathcal{O}_c$ с гомом-м $\iota: \mathcal{H}_q(W) \to End(P_{KZ})^{opp}$ представляющий KZ: $KZ = \iota^* \circ Hom(P_{KZ}, \bullet)$

Утверждение 2) сводится к

2a) ι сюрьекц.

2б) $\dim End(P_{KZ}) = |W|$

Д-во 2а)

Задача 2: Следующие эквив.: i) ι сюрьективно

ii) $\forall M \in End(P_{KZ})^{opp}\text{-mod}$, $\forall N \subset \iota^*(M)$, $\mathcal{H}_q(W)$-подмодуль $\Rightarrow N$ - подмодуль для $End(P_{KZ})^{opp}$ (конечно, $\iota^*(M)$, M - одно и тоже пр-во)

Мы докажем ii). А именно, пусть $M' \in \mathcal{O}_c$ т.ч. $M = Hom(P_{KZ}, M')$ ($Hom(P_{KZ}, \bullet)$ - это фактор-функтор, в частн. сущест. сюрьективный), а N' - соответствующий объект в $Loc_{rs}^W(\mathfrak{h}^{reg})$, к-ый переход в $N \in B_W\text{-mod}$ при эквив. категорий. Условие $N \subset \iota^*(M)$ переводится, как $N' \subset M[S^{-1}]$. Пусть M_0' - прообраз N' при естеств. гомом-ме $M \to M[S^{-1}]$. Это H_c-подмодуль, поэтому $M_0' \in \mathcal{O}_c$. Но $M_0'[S^{-1}] = N' \Rightarrow KZ(M_0') = N' \Rightarrow N' = Hom(P_{KZ}, M_0')$ как $End(P_{KZ})^{opp}$-модуль $\square$

Для д-ва б) нам будут нужны двойственные модули Верма (a.k.a. костандартные объекты). Напомним изо. $H_c(W,\mathfrak{h})^{opp} \xrightarrow{\sim} H_c(W,\mathfrak{h}^*)^{\pi}$, $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $w \mapsto w^{-1}$

~~Этот изоморфизм переводит~~ Это дает возможность определить контравариантную эквив-ть $\bullet^\vee: \mathcal{O}_c(W,\mathfrak{h}^*) \to \mathcal{O}_c(W,\mathfrak{h})$, ~~задаётся~~ $N = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N_\lambda$ (обобщ. собств. разл-е для $h^* \in H_c(W,\mathfrak{h}^*)$) $\mapsto N^\vee := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N_\lambda^*$. Отметим, что $N^\vee$ - правый $H_c(W,\mathfrak{h}^*)$-модуль, и стало быть левый $H_c(W,\mathfrak{h})$-модуль

Задача 3: Докажите, что $M^\vee \in \mathcal{O}_c(W,\mathfrak{h})$ и что $M^\vee_\lambda = M^*_\lambda$. Для этого проверьте,

(i) Изоморфизм $H_c(W,\mathfrak{h})^{opp} \simeq H_c(W,\mathfrak{h}^*)$ переводит элемент Эйлера в элемент Эйлера

(ii) $M \in H_c(W,\mathfrak{h})$-mod лежит в $\mathcal{O} \Leftrightarrow M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda$ и $\{\lambda \mid M_\lambda \neq 0\}$ огранич. ~~сверху~~ снизу (значит $\mathrm{Re}\,\lambda$ ограничено)

Отметим, что $\bullet^\vee$ задаёт эквивалентность (обратная строится также). Положим $\nabla_c(\tau) = \Delta^*_c(\tau)^\vee$, где $\Delta^*_c(\tau)$ - Верма в $\mathcal{O}_c(W,\mathfrak{h}^*)$. По задаче 3, $ch\,\nabla_c(\tau) = ch\,\Delta_c(\tau)$ (отметим, что $\tau \simeq \tau^*$), и, значит классы $\nabla_c(\tau)$, $\Delta_c(\tau)$ в K_0 совпадают.

Задача 4: Докажите, что $\nabla_c(\tau)$ - это костандартные объекты в том смысле, что $\dim Hom(\Delta_c(\tau), \nabla_c(\tau')) = \delta_{\tau\tau'}$ и $Ext^1(\Delta_c(\tau), \nabla_c(\tau')) = 0$

$\mathcal{D}$-во 2б). Пусть $p \in \mathfrak{h}^{reg}$. По построению $\dim Hom(P_{KZ}, M) = \dim KZ(M) = \dim M_p$.

Пусть $[P_{KZ} : \Delta_c(\tau)]$ - это кратность $\Delta_c(\tau)$ в P_{KZ}

$\dim End(P_{KZ}) = \bigoplus_\tau [P_{KZ} : \Delta_c(\tau)] \cdot \dim Hom(P_{KZ}, \nabla_c(\tau)) = [\text{зад. } 4] \bigoplus \dim Hom(P_{KZ}, \nabla_c(\tau)) \cdot$

$\cdot \dim\tau = [\text{классы } \Delta_c(\tau), \nabla_c(\tau) \text{ совпадают}] = \bigoplus (\dim\tau)^2 = |W|$ □

3.3) Дальнейшие результаты.

3) мы докажем в след. лекции

Задача 5: a) Докажите, что в $\Delta_c(\tau)$ нет подмодулей аннулируемых KZ. Выведите, что KZ строгий на стандартно-фильтрованных объектах

б) Докажите, что у $\nabla_c(\tau)$ нет факторов, аннулир. KZ и что KZ строгий на костанд. фильтр. объектах

c) Докажите, что KZ строго полный на наклонных объектах, тех которые и станд. фильтрованы и костандартно фильтрованные

Теперь обсудим вопрос о связи $\mathcal{O}_c$ и $\mathcal{O}_{c'}$ для $c'-c \in \mathbb{Z}^{S/W}$ (в этом случае $q = q'$)

Т-ма (И.Л. 14) Существует эквивалентность

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{O}_c) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "KZ"'] & & D^b(\mathcal{O}_{c'}) \arrow[dl, "KZ"] \\ & D^b(\mathcal{H}_q(W)\text{-mod}) & \end{tikzcd}$$

Абелева эквивалентность имеет место, когда порядок один и тот же. Точнее

Т-ма (Рукье '05, И.Л. 14) В $\mathbb{Z}^{S/W}$ есть решетка Γ полного ранга ($\Gamma = \mathbb{Z}^{S/W}$ в типах A и B) т.ч., если $c'-c \in \Gamma$ и существует общ. порядок $\leq$ на $Irr(W)$ с $\leq_c \Rightarrow \leq$ и $\leq_{c'} \Rightarrow \leq$ то $\mathcal{O}_c \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{c'}$, эквив. сплетает KZ и $\Delta_c(\tau) \mapsto \Delta_{c'}(\tau)$.

Задача 6. Пусть $c \in \mathbb{Z}^{S/W}$. Д-те, что $\mathcal{O}_c$ полупроста