Лекция 3: Функторы индукции и ограничения.

1) Мотивация

2) Конструкция

3) Свойства

~~4) Приложения~~ 4) Приложения

1.1) Индукция и ограничение для групп и алгебр Гекке

$H\subset G$ - кон. группы, $\mathbb{K}$ поле $\rightsquigarrow$ функтор ограничения $\mathrm{Res}_G^H: \mathbb{K}G\text{-mod}\to\mathbb{K}H\text{-mod}$ допускает левый сопряженный $\mathrm{Ind}_G^H: \mathbb{K}H\text{-mod}\to\mathbb{K}G\text{-mod}$, $N\mapsto \mathbb{K}G\otimes_{\mathbb{K}H} N$ и правый сопряженный $\mathrm{Coind}_G^H: \mathbb{K}H\text{-mod}\to \mathbb{K}G\text{-mod}$, $N\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}H}(\mathbb{K}G,N) = [\mathbb{K}G$ - своб. левый $\mathbb{K}H$-модуль$] = (\mathbb{K}G)^*\otimes_{\mathbb{K}H} N$, но на $\mathbb{K}G$ есть инвариантная симм билин форма $(\cdot,\cdot)$ заданная $(g,h)=\delta_{gh,1}$, она отождествляет $\mathbb{K}G$-бимодули $\mathbb{K}G\simeq(\mathbb{K}G)^*$. Поэтому $\mathrm{Ind}_G^H\simeq\mathrm{Coind}_G^H$.

Такие функторы имеют смысл и для алгебр Гекке. А именно, выберем подмн-во $J\subset I$, и пусть W' соответств. параболическая подгруппа в W. Имеем естественный гомоморфизм $B_{W'}\to B_W$, который дает $\mathcal{H}_q(W')\to\mathcal{H}_q(W)$ (когда мы пишем $\mathcal{H}_q(W')$ мы имеем в виду $q|_J$). Он инъективен: $T_w\in\mathcal{H}_q(W')$ для $w\in W'$ переходит в $T_w\in\mathcal{H}_q(W)$. Получаем функтор ${}^{\mathcal{H}}\mathrm{Res}_W^{W'}: \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}\to\mathcal{H}_q(W')\text{-mod}$, его левый сопряженный ${}^{\mathcal{H}}\mathrm{Ind}_W^{W'}: \mathcal{H}_q(W')\text{-mod}\to \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$, $N\mapsto \mathcal{H}_q(W)\otimes_{\mathcal{H}_q(W')}N$, и правый сопряженный ${}^{\mathcal{H}}\mathrm{Coind}_W^{W'}: \mathcal{H}_q(W')\text{-mod}\to\mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$. Они изоморфны: $\mathcal{H}_q(W)$ всё ещё свободный левый $\mathcal{H}_q(W')$-модуль и на $\mathcal{H}_q(W)$ есть инвариантная форма.

Отметим, что гомоморфизм $B_{W'}\to B_W$ допускает геометрическую интерпретацию. А именно, пусть $\mathfrak{h}_{W'}$ - единственное W'-инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}^{W'}$ в $\mathfrak{h}$ - это refl-п простр-е для W'. Выберем ~~[illegible]~~ точку $b\in\mathfrak{h}$ с $W_b=W'$, и маленькую W' инвариантную ~~[illegible]~~ окрестность 0 в $\mathfrak{h}_{W'}$ в обычной топологии, скажем U. Отображение $U\to\mathfrak{h}$, $u\mapsto b+u$ дает вложение $U^{reg}/W'\hookrightarrow\mathfrak{h}^{reg}/W$ и искомый гомом. $B_{W'}=\pi_1(U^{reg}/W',p)\to\pi_1(\mathfrak{h}^{reg}/W,p)=B_W$.

Наша задача построить функторы Res, Ind для категорий $\mathcal{O}$.

1.2) Мотивация и основные свойства. KZ функтор описывает поведение $M\in\mathcal{O}_c$ на $\mathfrak{h}^{reg}$, он является композицией "алгебраической операции" - локализации и некоторой эквивалентности категорий. Функтор ограничения будет описывать структуру $M\in\mathcal{O}_c$ вблизи (формальной/малой в обычн топологии окрестности) некоторой точки $b\in\mathfrak{h}$. Он будет композицией функтора пополнения и некоторой эквивалентности категорий. А функтор индукции будет определяться по сопряженности (правой)

Т.е. мы получим функторы ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_W^{W'}: \mathcal{O}_c(W,\mathfrak{h}) \rightleftarrows \mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'}) : {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}_W^{W'}$. Основной результат состоит в том, что они согласованы с другими подобными функторами/отображениями. А именно, у нас есть функторы $\mathcal{O}_c(W)\xrightarrow{KZ}\mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$, $\mathcal{O}_c(W')\xrightarrow{KZ'}\mathcal{H}_q(W')\text{-mod}$ и отождествления $K_0(\mathcal{O}_c(W))\xrightarrow{\sim}K_0(W\text{-rep})$, $K_0(\mathcal{O}_c(W'))\xrightarrow{\sim}K_0(W'\text{-rep})$

Т-ма: Следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_c(W) \arrow[r, "{}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_W^{W'}"] \arrow[d, "KZ"'] & \mathcal{O}_c(W') \arrow[d, "KZ'"] \\
\mathcal{H}_q(W)\text{-mod} \arrow[r, "{}^{\mathcal{H}}\mathrm{Res}_W^{W'}"] & \mathcal{H}_q(W')\text{-mod}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{O}_c(W)) \arrow[r, "{[{}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_W^{W'}]}"] \arrow[d, "\simeq"'] & K_0(\mathcal{O}_c(W')) \arrow[d, "\simeq"] \\
K_0(W\text{-rep}) \arrow[r, "\mathrm{Res}_{W'}^{W}"] & K_0(W'\text{-rep})
\end{tikzcd}$$

Аналогичные утверждения верны для индукции

Мы также увидим, что Res и Ind бисопряжены. В качестве приложения мы докажем, что KZ строго полный на проективных, а в следующей лекции соотнесем $\mathcal{O}_c(S_n)$ с представлениями $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ (а также с действиями алгебр Каца-Муди на категориях позже)

1.3) Индукция и ограничение для конечных групп типа A_n *

Пусть, как раньше, $G(q)$ - расщеп. кон. редукт. группа над $\mathbb{F}_q$ (напр. $GL_n(\mathbb{F}_q)$), $B(q)$ - борель. По $J\subset I$ можем построить параболическую подгруппу $P\subset G(q)$, которая раскладывается, как $P = L\ltimes U$. Скажем для $GL_n(\mathbb{F}_q)$, J соответствует композиции $n=n_1+..+n_k$. Тогда $L = GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)\times .. \times GL_{n_k}(\mathbb{F}_q)$, и U состоит из строго блочно треуг. матриц.

Предположим, как и раньше, что $|B(q)|\neq 0$ в поле $\mathbb{K}$. В частн., $|U|\neq 0$. У нас есть Хариш-Чандровские функторы ограничения и индукции $\mathbb{K}G(q)\text{-mod}\rightleftarrows \mathbb{K}L\text{-mod}$

${}^{HC}\mathrm{Res}_G^L(M) = M^U$, ${}^{HC}\mathrm{Ind}_L^G(N) = \mathbb{K}G \otimes_{\mathbb{K}P} N$ (где U о-т тривиально на N). Эти функторы бисопряжены и согласованы с огранич/индукцией для алгебр Гекке

~~Задача~~:

2.1) Пополнение: Выберем $b\in\mathfrak{h}$ с $W_b = W'$. Можем рассмотреть пополнения: $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge b} = \varprojlim_m \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\mathfrak{m}_b^m$, где $\mathfrak{m}_b=\{f\in\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \mid f(b)=0\}$ – это форм. степенные ряды "центрированные в b". Кроме того рассмотрим аналогичн. пополнение $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W,\wedge Wb}$

Положим $H_c^{\wedge Wb} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W,\wedge Wb}\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W} H_c$

Лемма: На $H_c^{\wedge Wb}$ есть произведение т.ч. $H_c, \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W,\wedge Wb} \to H_c^{\wedge Wb}$ – гомом. алг-р

Д-во: как с $H_c[\delta^{-1}]$ – из того, что $[y,f]\in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W\ \forall f\in\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$. □

Замеч: Пусть M – $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-модуль. Тогда $M^{\wedge Wb} := \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W,\wedge Wb}\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W} M$ естественно отождествляется с $\bigoplus_{b'\in Wb} M^{\wedge b'}$, где $M^{\wedge b'} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge b'}\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} M$.

Напр. $H_c^{\wedge Wb} = \bigoplus_{b'\in Wb} H_c^{\wedge b'}$, но $H_c^{\wedge b'}$ не является алгеброй.

Определим категорию $\mathcal{O}_c^{\wedge Wb} = \{N\in H_c^{\wedge Wb}\text{-mod} \mid N$ кон. пор. над $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge Wb}\}$

Имеем функтор пополнения $M\mapsto M^{\wedge Wb}: \mathcal{O}_c\to\mathcal{O}_c^{\wedge Wb}$

Предложение: (Безрукавников-Этингоф) Есть эквивалентность $\mathcal{O}_c^{\wedge Wb}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})$.

Задача 1: Докажите это для $b=0$. Обратный функтор отправляет N в $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} N_\lambda$.

2.2) Построение эквивалентности.

По сути, в 2 шага. Рассм. алг-ру $H_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge b}$ ($W'b=b$) и катег. $\mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W')^{\wedge b}$

Лемма: $\mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W')^{\wedge b}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})$

Д-во. $b\in\mathfrak{h}^{W'}$ поэтому отобр. $y\mapsto y,\ w\mapsto w,\ x\mapsto x-\langle b,x\rangle \rightsquigarrow H_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge b}\xrightarrow{\sim}H_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge 0}$ $\rightsquigarrow \mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W')^{\wedge b}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge 0}$. По задаче 1, $\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge 0}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})$.

Эквивалентность $\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})$ – это частичная лемма Кашивары, взаимно обратные функторы задаются так: $M\to M^{(\mathfrak{h}^{W'})}$, $N\mapsto \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{W'}]\otimes N$ (заметим, что $H_c(\mathfrak{h},W') = H_c(\mathfrak{h}_{W'},W')\otimes D(\mathfrak{h}^{W'})$) □ (*)

Категории $\mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W')^{\wedge b}$ и $\mathcal{O}_c^{\wedge Wb}$ тоже эквивалентны. Это происходит потому, что $H_c^{\wedge Wb}$ – алгебра матриц над $H_c(\mathfrak{h},W')^{\wedge b}$

(*) Функтор $\mathcal{O}_c\to\mathcal{O}_c^{\wedge Wb}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})^{\wedge 0}$ может быть описан как ограничение $M\in\mathcal{O}_c$ на формальный слой $b+\mathfrak{h}_{W'}^{\wedge 0}$ к $\mathfrak{h}^{W'}$ в точке b

Базовое наблюдение: $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W,\wedge_{W_b}} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W',\wedge_b}$

Поймем теперь как устроена алгебра $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W)^{\wedge_{W_b}} = (\bigoplus_{b'\in W_b} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_{b'}})\#W$. Пусть $e_{b'}$ – единица в $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_{b'}}$ так что $e_{b'}$ идемп-т и $\sum_{b'\in W_b} e_{b'} = 1$. Заметим, что подалг. натянутая на $e_{b'}$, $b'\in W_b$, $w\in W$ – это $Mat_{|W/W'|}(\mathbb{C}W')$, при этом e_b – диаг. матр единица. Отметим, что $e_b(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W)^{\wedge_{W_b}}e_b = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_b}\#W'$. Кроме того, поскольку e_b – диаг. матр единица, $M\mapsto e_b M$ – эквив. категорий $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W)^{\wedge_{W_b}}\text{-mod} \to$
$\to \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_b}\#W'\text{-mod}$.

Факт (по сути, Безрукавников-Этингоф) $e_b(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]\#W)^{\wedge_{W_b}}e_b \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_b}\#W'$ продолж. до $e_b H_c^{\wedge_{W_b}} e_b \xrightarrow{\sim} H_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge_b}\#W'$. При этом y в прав. части переходит в $e_b\left(y - \sum_{s\notin W'} \frac{c(s)\langle\alpha_s,y\rangle}{\alpha_s}(s-1)\right)e_b$ (заметьте что $D_y = D'_y + \sum_{s\notin W'}\frac{c(s)\langle\alpha_s,y\rangle}{\alpha_s}(s-1)$)

Т.е. получаем эквив $\mathcal{O}_c^{\wedge_{W_b}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge_b}$, $M\mapsto e_b M$

Сл-е: композиция $\mathcal{O}_c \longrightarrow \mathcal{O}_c^{\wedge_{W_b}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h})^{\wedge_b}$ это $M\to M^{\wedge_b}$ где д-е $y\in H_c(W',\mathfrak{h})$ восст. по $y\in H_c(W,\mathfrak{h})$ как указано в Факте. Композиция $\mathcal{O}_c \longrightarrow \mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})^{\wedge_0}$ $M\to \mathrm{Res}(M)^{\wedge_0}$ – это $M\to M|^{\wedge_0}_{b+\mathfrak{h}_{W'}}$ (и д-е $y\in\mathfrak{h}_{W'}$ восст. как выше).

Замеч: Можем заменить формальные окрестности большими – даже этальными. Именно, пусть $\mathfrak{h}^{r,W'} = \mathfrak{h}\setminus\bigcup_{s\notin W'}\ker\alpha_s = \{b\in\mathfrak{h} \mid W_b\subset W'\}$

Тогда $\mathfrak{h}^{r,W'}/W' \subset \mathfrak{h}/W'$ – в точн. локус, где $\mathfrak{h}/W'\to\mathfrak{h}/W$ этальны. $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^{r,W'}/W']\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W} H_c$ – алгебра, и она изом-на $Mat_{|W/W'|}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^{r,W'}/W']\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}/W']} H_c(W',\mathfrak{h}))$

Для $W'=\{1\}$ изом. очень похож на $H_c[\delta^{-1}] \simeq D(\mathfrak{h}^{reg})\#W$

2.3) Функтор индукции. Построим ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}^W_{W'}: \mathcal{O}_c(\mathfrak{h},W)\longrightarrow\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})$: композ. пополн-я $M\mapsto M^{\wedge_b}$ и эквив категорий $\mathcal{F}: \mathcal{O}_c^{\wedge_{W_b}} \xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_c(W',\mathfrak{h}_{W'})$. Поскольку Res – точный функтор между категориями представлений кон. мерных алгебр, у него есть правый (и левый) сопряженные. Правый сопряженный – это по опр-ю ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}^{W'}_W$. Мы хотим предъявить его более явно

~~Предл. $Res_W^{W'}$ допускает правый сопр. функтор~~

~~Д-во:~~ Достаточно ~~доказать, что~~ построить прав. сопр. к $M \mapsto M^{\wedge_{W b}}$ ~~допускает правый сопр. функтор~~. Для $N \in \mathcal{O}_c^{\wedge_{W b}}$ рассмотрим $\mathcal{E}(N) = \bigcup_{n \geq 0} \ker \mathfrak{h}^n$. Это сумма всех подмодулей $N' \subset N$ к-ые в $\mathcal{O}$. Заметим, что $Hom_{H_c}(M, \mathcal{E}(N)) = Hom_{H_c}(M, N) = [N \text{ полно}] = Hom_{H_c}(M^{\wedge_{W b}}, N)$. Поэтому, если $\mathcal{E}(N) \in \mathcal{O}_c$, то $N \mapsto \mathcal{E}(N)$ сопр. функтор. Поскольку $\mathcal{E}(N)$ - сумма модулей из $\mathcal{O}$, то $\mathcal{E}(N) \in \mathcal{O}_c \iff Hom_{H_c}(P, \mathcal{E}(N))$ кон. мерно для про-генератора $P \in \mathcal{O}_c$. Но $Hom_{H_c}(P, \mathcal{E}(N)) = Hom_{\mathcal{O}_c^{\wedge_{W b}}}(P^{\wedge_{W b}}, N)$ кон. мерно т.к $\mathcal{O}_c^{\wedge_{W b}} \simeq$ кат-я модулей над кон. мерной алгеброй $(\mathcal{O}_c(W', \mathfrak{h}_{W'}))$ $\square$

3) Свойства

3.1) Связь с ~~ограничением/индукцией~~ KZ

Докажем, что диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_c \arrow[r, "{}^{\mathcal{O}}Res"] \arrow[d, "KZ"] & \mathcal{O}_c(W', \mathfrak{h}_{W'}) \arrow[d, "KZ'"] \\ \mathcal{H}_q(W)\text{-mod} \arrow[r, "{}^{\mathcal{H}}Res"] & \mathcal{H}_q(W')\text{-mod} \end{tikzcd}$$

(можем заменить на $B_{W'}$, B_W)

Выберем точку p в определении KZ вида $b+u$ с $u \in \mathfrak{h}_{W'}$ и $|u|$ очень маленьким так что естественный гомоморфизм $B_{W'} \to B_W$ - это $\pi_1(U^{reg}/W') \to \pi_1(\mathfrak{h}^{reg}/W)$ ($U \subset \mathfrak{h}_{W'}$ - маленькая окр-ть 0). Тогда ~~$KZ \circ {}^{\mathcal{O}}Res(M)$~~ $Res \circ KZ$ - это M_p как вект. пр-во с действием $B_{W'}$ посредством монодромии. С другой стороны, мы можем заменить формальные окрестности на обычные в определении ${}^{\mathcal{O}}Res$. Мы получим ${}^{\mathcal{O}}Res(M)|_U = M|_{b+U}$. Из замечания ~~об изоморфизме $H_c^{\wedge_{W b}}$ с алгеброй матриц над $H_c(\mathfrak{h}, W')^{\wedge_b}$~~ о том, как y'и действуют на $Res(M)^{\wedge 0}$ и поведении операторов Данкла следует, что $M|_{U^{reg}} = M|_{b+U^{reg}}$ как локальные системы. Т.е $KZ' \circ {}^{\mathcal{O}}Res(M)$ - это опять M_b с представлением монодромии $\square$

Задача 3: Выведите аналогичное свойство для Ind используя тот факт, (докажите его тоже), что ${}^{\mathcal{O}}Res$, ${}^{\mathcal{O}}Ind$ бьют между категориями $\mathcal{O}_c^{tor}$, $\mathcal{O}_c(W', \mathfrak{h}_{W'})^{tor}$ состоящими из всех объектов которые кручение над $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (или $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_{W'}]$)

3.2) Поведение на K_0

${}^{\mathcal{O}}Res_W^{W'}$: Применим к $\Delta_c(\tau) = S(\mathfrak{h}^*) \otimes W$, $\Delta_c(\tau)^{\wedge_b} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_b} \otimes \tau \Rightarrow$

$Res(\Delta_c(\tau))^{\wedge_0} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_{W'}]^{\wedge_0}\otimes\tau$.

Задача 4: Пусть $M\in\mathcal{O}_c$. Предположим, что $M^{\wedge_0}\simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_0}\otimes\tilde\tau$ как $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\wedge_0}\# W$-модуль. Тогда M стандартно фильтрован, а $\Delta_c(\tau)$ появится в фильтрации столько раз, какова кратность τ в $\tilde\tau$.

Применяя это к $Res(\Delta_c(\tau))$ видим, в частности, что $[Res(\Delta_c(\tau))] = [\tau]$ как W'-модуль. Это дает $[{}^{\mathcal{O}}Res_W^{W'}] = Res_W^{W'}$.

• ${}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}$. Чтобы вопрос имел смысл мы должны показать, что ${}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}$ точный, или рассматривать $[R\,{}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}]$. Мы сделаем второе, а первое оставим в качестве задачи.

Задача 5: Покажите, что ${}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}$ точный функтор (что двойственность $\bullet^\vee$ делает с функторами пополнения, категорией $\mathcal{O}_c^{\wedge_{Wb}}$ и т.д.)

Мы утверждаем, что $R\,{}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}(\nabla_c(\tau'))$ не имеет старших когомологий и допускает фильтрацию $\nabla_c(\tau)$'и, где кратность $\nabla_c(\tau)$ равна кратности τ в $Ind_W^{W'}(\tau')$. Чтобы проверить, что $R\,{}^{\mathcal{O}}Ind\,\nabla_c(\tau')$ - это объект в $\mathcal{O}$ (а не просто комплекс) надо показать, что $Hom_{D^b(\mathcal{O}_c)}(P, R\,{}^{\mathcal{O}}Ind\,\nabla_c(\tau')[i])=0$ для $i\neq 0$. Но ${}^{\mathcal{O}}Res$ (точный функтор сопряженный слева к $R\,{}^{\mathcal{O}}Ind$) переводит P в стандартно фильтрованный объект, поэтому последний Hom равен $Hom_{D^b(\mathcal{O}_c')}({}^{\mathcal{O}}Res\,P, \nabla_c(\tau')[i])=0$ для $i\neq 0$.
Кратность $\nabla_c(\tau)$ в ${}^{\mathcal{O}}Ind\,\nabla_c(\tau')$ равна $\dim Hom_{\mathcal{O}_c}(\Delta_c(\tau), {}^{\mathcal{O}}Ind\,\nabla_c(\tau'))$ $=\dim Hom_{\mathcal{O}_c'}({}^{\mathcal{O}}Res\,\Delta_c(\tau), \nabla_c(\tau')) = \dim Hom_{W'}(\tau',\tau)$. □

3.3) Res, Ind и двойственность

Т-ма (И.Л.) Функторы ${}^{\mathcal{O}}Res_W^{W'}, {}^{\mathcal{O}}Ind_W^{W'}$ сплетаются двойственностью $\bullet^\vee$; напр. ${}^{\mathcal{O}}Res_W^{W'}(\bullet)^\vee \simeq {}^{\mathcal{O}}Res_W^{W'}(\bullet^\vee)$

Д-во - жуткий гемор! Следствие1: ${}^{\mathcal{O}}Res, {}^{\mathcal{O}}Ind$ бисопряжены $\Rightarrow {}^{\mathcal{O}}Ind$ точный

Следствие2: Функторы ${}^{\mathcal{O}}Res, {}^{\mathcal{O}}Ind$ отправляют проективные в проективные, инъективные в инъективные, (ко)стандартно фильтрованные в (ко)стандартно фильтрованные.

Д-во: Скажем ${}^{\mathcal{O}}Ind$ переводит инъект. в инъект. как правый сопр. к точному функтору. Кроме того мы уже видели, что Res отправляет стандартиз фильтрованные объекты в стандартно фильтрованные. Но костандартно фильтрованные получаются из станд. фильтр. применением $\circ^{\vee}$. Т.о. т-ма влечет, что ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}$ отправляет костанд. фильтр. объекты в костанд. фильтр.

Замеч (важное!) В конструкции ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{W}^{W'}$ (и, стало быть, ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}_{W}^{W'}$) мы использовали точку $b \in \mathfrak{h}^{W'} \cap \mathfrak{h}^{reg, W'} = \{y \in \mathfrak{h} \mid W_y = W'\}$. Можно показать, что функтор не зависит от b с точн. до изоморфизма. Более того, в некотором строгом смысле функторы ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_b$ образуют локальную систему на $\mathfrak{h}^{W'} \cap \mathfrak{h}^{reg, W'}$, что дает действие фундаментальной группы на функторе автоморфизмами. Ниже мы используем более формальную версию этой конструкции для конструкции действия алгебры Каца-Муди $\mathfrak{sl}_{\infty}$ или $\hat{\mathfrak{sl}}_e$ на $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_c(S_n)$ (и на $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_c(B_n)$).