Лекция 4: Приложение функторов KZ, Ind, Res, I

1) KZ строго полный на проективных

2) Краткое введение в $U_q(\mathfrak{gl}_n)$

3) Алгебра Шура и $\mathcal{O}_c(S_n)$ (главный блок)

1) Мы будем пользоваться следующими утверждениями, которые мы обсудим ниже

(i) KZ не аннулирует подобъекты в $\Delta_c(\tau)$, $\forall \tau$

(i') — — — — — фактор-объекты в $\nabla_c(\tau)$, $\forall \tau$

Отметим, что в (i), (ii) можем заменить KZ на $Res = {}^{\mathcal{O}}Res^1_W$ — оба отправляют $M \in \mathcal{O}_c$ в M_b для $b \in \mathfrak{h}^{reg}$. Кроме того, нам потребуется лемма

Лемма: $P_{KZ} \simeq Ind(\mathbb{C})$, где $Ind = {}^{\mathcal{O}}Ind^1_W$, и $\mathbb{C}$-модуль над $H_c(\{1\},0) = \mathbb{C}$

Д-во: $Hom(P_{KZ}, M) = KZ(M) = M_b$, $Hom_{\mathcal{O}_c}(Ind(\mathbb{C}), M) = Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, Res(M)) = M_b$ □

Т-ма: KZ строго полный на проективных

Д-во проведем такие, как оригинальное доказательство Struktursatz Соргеля (для БГГ категории $\mathcal{O}$, точнее, её главного блока, и функтора $\mathbb{V}$). Оно отличается от доказательства ГГОР, которое изложено в лекции 1.

Д-во: Мы докажем, что любой проект. $P \in \mathcal{O}_c$ включается в точную послед-ть $0 \to P \to P_{KZ}^{\oplus ?} \to P_{KZ}^{\oplus ?}$ и выведем утверждение отсюда.

Шаг 1: Напомним, что функторы Ind, Res биэсопряжены. В частности, для $M \in \mathcal{O}_c$ имеем естественные гомоморфизмы $M \to Ind \circ Res(M)$ и $Ind \circ Res(M) \to M$. Ядро первого аннулируется Res (базовая замена), а потому по (i), он инъективный на стандартно фильтров. объектах. Поэтому для такого объекта получаем вложение $M \hookrightarrow P_{KZ}^{\oplus m}$ ($m = \dim Res(M)$). Аналогично, из (ii), второй гомоморфизм сюръективен на костанд. фильтр. объектах

Шаг 2: По шагу 1, $P \hookrightarrow P_{KZ}^{\oplus m}$. Мы утверждаем, что ~~...~~ коядро стенд. фильтровано $\iff Ext^i(P_{KZ}^{\oplus m}/P, \nabla_c(\tau)) = 0$ ($i > 0$). Для $i > 1$ это автоматически, а для $i = 1$ имеем точн. послед.: $0 \to Hom(P_{KZ}^{\oplus m}/P, \nabla_c(\tau)) \to Hom(P_{KZ}^{\oplus m}, \nabla_c(\tau)) \to Hom(P, \nabla_c(\tau))$

$$Hom(P, Ind \circ Res\, \nabla_c(\tau)) = Hom(Ind \circ Res(P), \nabla_c(\tau))$$

$$\to Ext^1(P_{KZ}^{\oplus m}/P, \nabla_c(\tau)) \to 0 = Ext^1(P_{KZ}^{\oplus m}, \nabla_c(\tau))$$

P_{KZ} проект.

Т.е. все сводится к $\mathrm{Ind} \circ \mathrm{Res}\, \nabla_c(\tau) \to \nabla_c(\tau)$ поскольку P проект. Но это Шаг 1.

Шаг 3: Выведем, что KZ строго полный на проект. из $0 \to P \to P_{KZ}^{\oplus ?} \to P_{KZ}^{\oplus ?}$

Как функтор между категориями модулей над конечномерными алгебрами, $KZ = \mathrm{Hom}(P_{KZ}, \bullet)$ допускает правый сопряженный KZ^* и $KZ^* \circ KZ(P_{KZ}) = P_{KZ}$ ~~(это базовый результат о фактор-функторах, который не сложен)~~. Действительно $P_{KZ} \to KZ^* \circ KZ(P_{KZ})$. Этот кофункт инъективный, но и сам P_{KZ} инъективный по Лемме потому $KZ^* \circ KZ(P_{KZ}) = P_{KZ} \oplus M$, где $KZ(M) = 0$. С другой стороны, $KZ(M) = 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}(M, KZ^* \circ KZ(P_{KZ})) = 0 \Rightarrow M = 0$

Теперь $\mathrm{Hom}(P, P_{KZ}) = \mathrm{Hom}(P, KZ^* \circ KZ(P_{KZ})) = \mathrm{Hom}(KZ(P), KZ(P_{KZ}))$.

Для общего проективного P' равенство $\mathrm{Hom}(P, P') = \mathrm{Hom}(KZ(P), KZ(P'))$ следует из $0 \to P' \to P_{KZ}^{\oplus ?} \to P_{KZ}^{\oplus ?}$ и некоторого варианта S-леммы $\square$

Замечание: – зачем нам это? Теорема позволяет доказывать эквивалентность категорий: если мы построим еще какую-нибудь категорию $\mathcal{C}$ с тем же набором отметок для простых, что и у $\mathcal{O}_c(W)$ и фактор-функтором π $\mathcal{C} \to \mathcal{H}_q(W)\text{-mod}$, который строго полный на проективных и $KZ(P_c(\tau)) = \pi(P^{\mathcal{C}}(\tau))$, то это дает эквивалентность $\mathcal{O}_c(W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ с $P_c(\tau) \mapsto P^{\mathcal{C}}(\tau)$

Действительно, пусть $P_c = \bigoplus_\tau P_c(\tau)$, $P^{\mathcal{C}} = \bigoplus_\tau P^{\mathcal{C}}(\tau)$. Тогда

$\mathcal{O}_c(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_c}(P_c)^{opp}\text{-mod} = \mathrm{End}_{\mathcal{H}_q(W)}(KZ(P_c))^{opp}\text{-mod} = \mathrm{End}_{\mathcal{H}_q(W)}(\pi(P^{\mathcal{C}}))^{opp}\text{-mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$.

Таким образом мы докажем эквивалентность $\mathcal{O}_c(S_n)$ и $S_q(n)\text{-mod}$, где $S_q(n)$ – q-алгебра Шура, фактор $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ $(m \geq n)$ действующий на полиномиальных представлениях степени n (мы определим, что это такое ниже)

Задача 2. Пусть $c(s) \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ $\forall s$. Тогда KZ строго полный на стандартно фильтр. объектах

2) Краткое введение в $U_q(\mathfrak{gl}_m)$

2.1) Структура алгебры и ~~подалгебры~~ предст-й: $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$

$U_\varepsilon = \mathbb{C}\langle E_i, F_i, K_j^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m \rangle /$ соотн:

$K_i K_j = K_j K_i$, $K_j E_i K_j^{-1} = \begin{cases} E_i, & j \neq i, i+1 \\ \varepsilon E_i, & j = i \\ \varepsilon^{-1} E_i, & j = i+1 \end{cases}$ $\quad K_j F_i K_j^{-1} = \begin{cases} F_i, & j \neq i, i+1 \\ \varepsilon^{-1} F_i, & j = i \\ \varepsilon F_i, & j = i+1 \end{cases}$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\, \frac{K_i K_{i+1}^{-1} - K_i^{-1} K_{i+1}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}$$

+ q-соотн-я Серра, напр. $E_i^2 E_{i+1} + E_{i+1} E_i^2 = (\varepsilon + \varepsilon^{-1}) E_i E_{i+1} E_i$, $E_i E_j = E_j E_i$ $(j \neq i, i+1)$
аналог. с $i \leftrightarrow i+1$, и аналог. для F'ов

Пример: $\mathbb{C}^m$ предст-е U_ε с $E_i \mapsto E_{i,i+1}$, $F_i \mapsto E_{i+1,i}$, $K_j \mapsto \mathrm{diag}(1, .. 1, \varepsilon, 1, .. 1)$

Теорема: Неприв. кон.мерн. предст-я U_ε при $\varepsilon \notin \{\sqrt{1}\}$ классиф. $\Lambda^+ \times \{\pm 1\}^m$, $V(\lambda, \sigma)$
где Λ^+ - мн-во домин. весов: $\Lambda^+ = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i,\ \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \}$. Предст-е соотв. $(\lambda, \sigma) \in \Lambda \times \{\pm 1\}^m$ однозн. характеризуется тем, что там есть старший вектор v с $E_i v = 0\ \forall i$ и $K_j v = \sigma_j \varepsilon^{\lambda_j} v$. Кроме того, все предст-я с весовым разл. отн. K_j'х вполне приводимы

2.2) Тензорные произведения и R-матрица

Копроизведение $U_\varepsilon \to U_\varepsilon \otimes U_\varepsilon$, $\Delta(K_j) = K_j \otimes K_j$, $\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i K_{i+1}^{-1} \otimes E_i$,
$\Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} K_{i+1} + 1 \otimes F_i \rightsquigarrow U_\varepsilon \curvearrowright (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$

Δ не симметр., поэтому $\sigma_{V_1 V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$, $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ - не изом. U_ε-мод-й
Но при нек. усл-х (напр. $\dim V_i < \infty$ и $\varepsilon \notin \{\sqrt{1}\}$) $\exists\ R_{V_2, V_1} : V_2 \otimes V_1 \circlearrowleft$
(приход. из "унив. R-матрицы" $R \in U_\varepsilon \hat{\otimes} U_\varepsilon$) т.ч. $R_{V_2, V_1} \circ \sigma_{V_1, V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$
изом. U_ε-модулей

Пример: $R_{\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m} \in End(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m)$, $R(\underset{\text{ст. базис}}{v_i \otimes v_j}) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}(v_i \otimes v_j), & i = j \\ v_i \otimes v_j, & i < j \\ v_i \otimes v_j + (\varepsilon^{-1} - \varepsilon) v_j \otimes v_i, & i > j \end{cases}$

$\rightsquigarrow \tau_1, \dots \tau_{n-1} \in End_{U_\varepsilon}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$, $\tau_i = id^{\otimes i-1} \otimes (\overset{R \circ \sigma}{\cancel{\sigma \circ R}}) \otimes id^{\otimes n-i-1}$ удовл. соотн. кос
(ген-в в B_n) - по общ. св-вам R-матриц и $(\tau_k - \varepsilon^{-1})(\tau_k + \varepsilon) = 0$
$\rightsquigarrow H_q(S_n) \longrightarrow End_{U_\varepsilon}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$, $T_k \to \varepsilon \tau_k$ $(q = \varepsilon^2)$

Т-ма (квантовая двойственность Шура-Вейля). Пусть $m \geq n$ и $\varepsilon \neq \sqrt{1}$. Тогда
$H_q(S_n) = End_{U_\varepsilon}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$ и образ U_ε в $End((\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$ совпадает с
$End_{H_q(S_n)}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$ (этот образ называется q-алгеброй Шура). Более того,
$(\mathbb{C}^m)^{\otimes n} = \bigoplus_{\tau \vdash n} V(\tau; 1) \otimes S_\tau$, где S_τ - неприв. предст-е $H_q(S_n)$ соотв. τ.

2.3) Случай корня из 1. В случае $q = \varepsilon^2 \in \{\sqrt{1}\}$ все перечисленное выше (при подх. модификациях) имеет смысл, если мы модифицируем алгебру U_ε "добавив" разделенные степени. А именно рассмотрим алгебру $U_v / \mathbb{C}(v)$, которая определяется как и U_ε. А внутри рассмотрим $\mathbb{C}[v^{\pm 1}]$-подалгебру, порожденную элементами E_i, F_i, K_j, а также $\underset{E_i^{(\alpha)}}{\frac{E_i^{\alpha}}{[\alpha]_v^!}}$, $\underset{F_i^{(\alpha)}}{\frac{F_i^{\alpha}}{[\alpha]_v^!}}$, $\binom{K_j}{\ell} = \dfrac{\prod_{k=0}^{\ell-1}\left[(K_j v^{-k} - K_j^{-1} v^{k})/(v - v^{-1})\right]}{[\ell]_v!}$ ~~$(\ell=\alpha)$~~ $\left(\begin{array}{l}[\alpha]_v^! = [1]_v [2]_v \ldots \\ [i]_v = v^{i-1} + v^{i-3} + \ldots + v^{1-i}\end{array}\right)$

Здесь α - порядок $q = \varepsilon^2$ (и мы полагаем, что ε - примит. корень степени $2d$)

Положим $\dot{U}_\varepsilon = \dot{U}_v / (v - \varepsilon)$. Заметим, что в $\dot{U}_\varepsilon$ можно определить разделенные степени $E_i^{(n)}, F_i^{(n)}$ для любого n (т.е. $\frac{E_i^n}{[n]_v^!} \in \mathbb{C}[v^{\pm 1}]_\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}[v^{\pm 1}]} \dot{U}_v$). Несложно также показать, что $\dot{U}_\varepsilon = \dot{U}_\varepsilon^- \otimes \dot{U}_\varepsilon^0 \otimes \dot{U}_\varepsilon^+$, где эти подалгебры порождены элементами содержащими F_i; K_j, E_i.

Теория представлений $\dot{U}_\varepsilon$ соотн. с теорией представлений U_ε с общим ε примерно также, как теория представлений $GL_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ с теор. предст. $GL_n(\mathbb{C})$ (здесь p соотв. α), только в первом случае основное поле остается тем же. А именно, любое кон. представление $\dot{U}_\varepsilon$ допускает весовое разложение, где под весовым пр-вом мы понимаем обобщ. собств. пр-во для $\dot{U}_\varepsilon^0$ соответствующее некоторому характеру. Возможные веса - это элементы в $\Lambda \times \{\pm 1\}^m$, где Λ - решетка весов $\mathbb{Z}^m$. Скажем для $\lambda \in \Lambda$ на весовом пр-ве V_λ эл-т K_j действует умножением на ε^{λ_j}, а $\binom{K_j}{\ell}$ умножением на $\left.\prod_{k=0}^{\ell-1} \dfrac{((v^{\lambda_j - k} - v^{k - \lambda_j}) / (v - v^{-1}))}{[\ell]_v^!}\right|_{v=\varepsilon}$ ~~$(\ell=\alpha)$~~

что одно и то же для л/н σ, где V_λ собств. подпр-во

Нас будут интересовать только представления вида $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ (т.е. $V_{\lambda, \sigma} = 0$ для $\sigma \neq 1$)

Т-ма: Неприводимые представления такого вида параметризуются Λ^+.

А именно для $\lambda \in \Lambda^+$ можем рассмотреть модуль Вейля $W(\lambda)$, который задается "также" как $V(\lambda)$: а именно он порождается вектором v_λ веса λ с доп. соотн. $E_i^{(\ell)} v_\lambda = 0$ для $\ell > 0$ и $F_i^{(\ell)} v_\lambda$ для $i > \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Он обладает унив. свойством: $\mathrm{Hom}_{\dot{U}_\varepsilon}(W(\lambda), V) = V_\lambda \cap \bigcap_{i,\ell} \ker E_i^{(\ell)}$. У $W(\lambda)$ есть единств. простой фактор $L(\lambda)$, и это все простые объекты. Название "модуль Вейля" объясняется тем, что $\mathrm{ch}\, W(\lambda)$ дается формулой Вейля - он такой же, как у $V(\lambda)$. Напр. $W(1,0,\ldots,0) = \mathbb{C}^m$.

Замеч: $\dot{U}_v \subset U_v$ - подалг. Хопфа $\rightsquigarrow$ $\dot{U}_\varepsilon$ - алг. Хопфа, и есть унив. $R \in \dot{U}_\varepsilon \hat{\otimes} \dot{U}_\varepsilon$

~~2.4) q-алгебра Шура в корнях из 1 (без доказательств ☺)~~

3) Алгебра Шура и $\mathcal{O}_c(S_n)$

3.1) Категория $\mathcal{O}_c(S_n)$. Мы предположим, что $c \in \mathbb{R}_{>0}$ (мы объясним, что происходит в общ. случае позже). Отождествим $\mathrm{Irr}(S_n)$ с $\{\tau \vdash n\}$. Вычислим c-функцию $c_\tau = -c\sum_{i<j}(ij)|_\tau$. Напомним понятие содержания, $\mathrm{cont}(\tau)$. А именно для квадратика в диагр. Юнга $\square$ с коорд. x (номер столбца) и y (номер строки) положим $\mathrm{cont}(\square) = x-y$. Пусть $\mathrm{cont}(\tau) = \sum_{\square\in\tau}\mathrm{cont}(\square)$. Т.о. максимальное содержание – у разбиения (n) – строки из n клеток: $\mathrm{cont}((n)) = 0+1+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$, а минимальное – у столбца (1^n): $\mathrm{cont}((1^n)) = -\frac{n(n-1)}{2}$

Напомним, что категория $\mathcal{O}_c(S_n)$ (в дальн. будем писать $\mathcal{O}_c(n)$) полупроста, если $\tau \leq_c \tau' \Rightarrow \tau = \tau'$. В частн., если $\mathcal{O}_c(n)$ не полупр, то $c \in \mathbb{Q}$. Отметим, что можем рассмотреть более грубый порядок $\leq$: $\tau \leq \tau'$, если $\tau = \tau'$ или $\mathrm{cont}(\tau) < \mathrm{cont}(\tau')$ (здесь мы пользуемся $c>0$). $(\mathcal{O}_c(n), \leq)$ – это старшевесовая категория. В частности, $\Delta_c((n))$ проективный. Опишем теперь $P_c(\tau)$ для произв. $\tau \vdash n$. Рассмотрим парабол. подгруппу $S_\tau = S_{\tau_1}\times\ldots\times S_{\tau_k} \subset S_n$ и объект $I\Delta(\tau) = \mathrm{Ind}_{S_\tau}^{S_n}\Delta((\tau_1))\boxtimes\Delta((\tau_2))\boxtimes\ldots\boxtimes\Delta((\tau_k))$. Мы индуцируем проективный объект, поэтому $I\Delta(\tau)$ проективный

Предл.: $P_c(\tau)$ – единств. прямое слагаемое в $I\Delta(\tau)$, которое не встречается в $I\Delta(\tau')$ с $\tau' > \tau$.

Д-во: $[I\Delta(\tau)] = \mathrm{Ind}_{S_\tau}^{S_n}\mathrm{triv}$. Классический результат – что τ минимальное представление в этом индуц. (отн. порядка $\trianglelefteq$ на диагр. Юнга: $\tau \trianglelefteq \tau' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{j}\tau_i \leq \sum_{i=1}^{j}\tau'_i$, но $\tau \trianglelefteq \tau' \Rightarrow \tau \leq \tau'$). С другой стороны, $[P_c(\tau')] = [\Delta_c(\tau')] + \sum_{\tau''<\tau'} ?[\Delta_c(\tau'')]$ $\forall \tau'$. Лемма след. отсюда $\square$

Опишем теперь $KZ(P_c(\tau))$. Напомним, что KZ сплетает ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}$ с ${}^{\mathcal{H}}\mathrm{Ind}$. Вычислим $KZ(\Delta_c((n)))$. Размерность равна $\dim\tau = 1$. Наше вычисление монодромии показывает, что все T_i действуют как 1, т.е. $KZ(\Delta_c(\mathrm{triv})) = {}^{\mathcal{H}}\mathrm{triv}$. Т.е. $KZ(I\Delta(\tau)) = {}^{\mathcal{H}}\mathrm{Ind}_{S_\tau}^{S_n}{}^{\mathcal{H}}\mathrm{triv}$. Поскольку KZ строго полный на проективных, то он переводит неразложимые проективные в неразлож. объекты. Отсюда

Следствие: $KZ(P_c(\tau))$ – это единственное неразложимое слагаемое в ${}^{\mathcal{H}}\mathrm{Ind}_{S_\tau}^{S_n}{}^{\mathcal{H}}\mathrm{triv}$, которое не появляется для $\tau' > \tau$

Т.е. $KZ(P_c(\tau))$ – это т.н. модуль Юнга, $Y(\tau)$.

3.2) Полиномиальные представления $\dot{U}_\varepsilon$ и q-алгебра Шура

Опр: Кон.мерное предст. $\dot{U}_\varepsilon(\mathfrak{gl}_m)$ называется полиномиальным степени n, если $V = \bigoplus_{\mu\in\Lambda} V_\mu$ (весов. подпр-ва) и $V_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu_m \geq 0$ и $\sum \mu_i = n$

Пример: $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$; $W(\tau)$, $\tau \vdash n$ (хар-р дается формулой Вейля)

Пусть $Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$ – полная подкатегория полином предст-й, это Серровская оболочка $L(\tau)$, $\tau \vdash n$. Нас будет интересовать случай $m \geq n$. Отметим, что у нас есть функтор $Pol_{n_1}(\dot{U}_\varepsilon) \boxtimes Pol_{n_2}(\dot{U}_\varepsilon) \to Pol_{n_1+n_2}(\dot{U}_\varepsilon)$, $M_1 \boxtimes M_2 \mapsto M_1 \otimes M_2$

Факт (о $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$). Это проективное представление в $Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$. Любой объект в $Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$ изоморфен подфактору в $[(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}]^{\oplus ?}$. Наконец (и здесь используем $m \geq n$) $End_{\dot{U}_\varepsilon}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n}) = \mathcal{H}_q(n)$

Т.о. получаем точный функтор $S := Hom_{\dot{U}_\varepsilon}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, \bullet) : Pol_n(\dot{U}_\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{H}_q(n)\text{-mod}$ (функтор Шура)

Теорема (Рукье 05 - в более слабой форме, И.Л 13) Все еще $m \geq n$.
Существ. эквив-ть $\mathcal{O}_c(S_n) \xrightarrow{\sim} Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$ со след. свойствами:

(1) Она сплетает KZ и S
(2) Она сплетает ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}^{S_n}_{S_{n_1} \times S_{n_2}}$ с $\bullet \otimes \bullet$
(3) Она переводит $\Delta_c(\tau)$ в $W(\tau)$

3.3) Доказательство: основано на следующем утверждении о $\bullet\otimes\bullet : Pol_{n_1}(\dot{U}_\varepsilon) \boxtimes Pol_{n_2}(\dot{U}_\varepsilon) \longrightarrow Pol_{n_1+n_2}(\dot{U}_\varepsilon)$

Факт: Этот функтор переводит проективные в проективные и след диагр. коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} Pol_{n_1}(\dot{U}_\varepsilon) \boxtimes Pol_{n_2}(\dot{U}_\varepsilon) & \longrightarrow & Pol_{n_1+n_2}(\dot{U}_\varepsilon) \\ \downarrow S\boxtimes S & & \downarrow S \\ \mathcal{H}_q(n_1)\otimes\mathcal{H}_q(n_2)\text{-mod} & \xrightarrow{{}^{\mathcal{H}}\mathrm{Ind}^{S_{n_1+n_2}}_{S_{n_1}\times S_{n_2}}} & \mathcal{H}_q(n_1+n_2)\text{-mod} \end{array}$$

Кроме того $Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$ – категория со старшим весом, в которой порядком является $\leq$, стандартными – модули Вейля, а костандартными двойственные модули Вейля: $M(\tau) = \Delta(-\tau_m, -\tau_{m-1}, \dots, -\tau_1)^*$. Наконец, S строго полный на проективных. Отсюда ~~Знание* получить этими двумя свойствами теорему~~ уже легко вывести теорему

Замеч: Определим q-алгебру Шура как $S_q(n;m)$ = образ $\dot{U}_\varepsilon$ в $End((\mathbb{C}^n)^{\otimes n})$

~~Т-е~~ По факту, выше, любое представление в $Pol_n(\dot{U}_\varepsilon)$ пропускается через $S_q(n;m)$. Утверждение, что S строго полно на представлениях означает, что $S_q(n,m) = End_{H_q(n)}((\mathbb{C}^n)^{\otimes m})$

Замеч: Последнюю теорему мы используем для вычисления характеров неприводимых в $\mathcal{O}_c(S_n)$. А именно, если все части τ делятся на $\mathcal{L}$ = знаменатель c, то характер $L_c(\tau)$ может быть вычислен с помощью квантового Фробениуса. Для общего τ ситуация более сложная – характер выражается через аффинные полиномы Каждана-Люстига, чтобы это увидеть мы объясним диаграмму эквивалентности между $\dot{U}_\varepsilon(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$-mod и некоторой категорией модулей над $\hat{\mathfrak{gl}}_m$.

Замеч: Мы рассмотрели $c \in \mathbb{Q}_{>0}$. Случай $c \in \mathbb{Q}_{<0}$ обрабатывается с помощью эквивалентности $\mathcal{O}_c(S_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{-c}(S_n)$ которая возникает из изоморфизма $H_c(S_n) \xrightarrow{\sim} H_{-c}(S_n)$, $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $w \mapsto sgn(w)w$.

3.4) Алгебра Шура и теория представлений $\overline{\mathbb{F}}_\ell GL_n(\mathbb{F}_q)$

Выберем конечн. алгебраическое расширение K поля $\mathbb{Q}_\ell$ т.ч $\mathbb{K}GL_n(q)$ расщепляется, пусть R-кольцо целых в K, т.ч для макс. идеала $\mathfrak{m} \subset R$ имеем $char\, R/\mathfrak{m} = \ell$. Предположим $q \neq 0,1 \mod \ell$. Пусть $I = \mathbb{K}GL_n(q)$ - двуст. идеал аннулирующий в точн. представлениях без B-инвар. вектора. Имеем R-алгебру $RGL_n(q)/(RGL_n(q) \cap I)$, плоск. над R

С другой стороны можем рассм. $\dot{U}_{R,\varepsilon}$ (возм. расширив K). Получаем R-алгебру $S_q^R(n;m)$

Т-ма (Такеучи) Категории $RGL_n(q)/(RGL_n(q) \cap I)$-mod и $S_q^R(n;m)$-mod эквивалентны

Т.о $S_q^{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(n,m)$-mod контролирует (на самом деле, всю) теорию предст. $\overline{\mathbb{F}}_\ell GL_n(q)$