Лекция 5. Конечномерные предст-я и категорные действия алгебр Ли.

1) Квантовый Фробениус и характер $L_{\frac{a}{d}}(d\tau)$ | 2) Пр-во Фока

3) Категорное действие $\hat{\mathfrak{sl}}_d \curvearrowright \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_{\frac{a}{d}}(n)$ $\quad (\mathcal{O}_c(n) := \mathcal{O}_c(S_n))$

4) Категорное действие $\mathfrak{heis} \curvearrowright \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_{\frac{a}{d}}(n)$

5) Конечномерные представления в $\mathcal{O}_c(n)$

1.1) Квантовый гомоморфизм Фробениуса $\varepsilon = \sqrt[d]{1}$

Напомним алгебру $\dot{U}_\varepsilon = \dot{U}_\varepsilon(\mathfrak{gl}_m)$ - квантовую группу с разделенными степенями. Она порождается эл-тами $E_i, F_i, E_i^{(d)}, F_i^{(d)}, 1 \leq i \leq m-1, \binom{K_j}{d}, K_j, 1 \leq j \leq m$. Теория представлений $\dot{U}_\varepsilon$ ведет себя примерно как у $GL_m(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$, "char $\mathbb{F}$" $= d$.

Для $GL_m(\mathbb{F})$, как и для любой другой алг. группы над $\mathbb{F}$, есть гомоморфизм Фробениуса $Fr: GL_m(\mathbb{F}) \to GL_m(\mathbb{F})$. Он дает функтор $Fr^*: Rep\, GL_m(\mathbb{F}) \circlearrowleft$. Он растягивает веса в d раз, т.е. если $ch\, V = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda e^\lambda$, то $ch\, Fr^*(V) = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda e^{d\lambda}$

случай $\varepsilon = \sqrt[d]{1}$, d нечетно (случай $\varepsilon = \sqrt[2d]{1}$ на обор)

Аналогичная конструкция имеет смысл и для $\dot{U}_\varepsilon$ с важным отличием: Фробениус ведет в $U(\mathfrak{gl}_m)$. Точнее есть эпиморфизм $\dot{U}_\varepsilon \xrightarrow{Fr} U(\mathfrak{gl}_m)$ заданный следующим образом: $E_i, F_i \mapsto 0$, $K_j \mapsto 1$, $E_i^{(d)} \mapsto e_i = E_{i,i+1}$, $F_i^{(d)} \mapsto f_i$, $\binom{K_j}{d} \mapsto E_{jj}$. Доказательство - вычисление (*). Опять же имеем Fr^*: ~~$\dot{U}_\varepsilon$-mod~~ $U(\mathfrak{gl}_m)\text{-mod} \to \dot{U}_\varepsilon\text{-mod}$, к-й на характерах ведет себя как и его классический аналог.

(*) Это гомоморфизм алгебр Хопфа.

В частности, $L(d\tau) = Fr^* V(\tau)$ для любого доминан. веса τ. Это дает хар-р $ch\, L(d\tau) = S_\tau(x_1^d, \ldots, x_m^d)$ (где S_τ - полином Шура, $x_1 \ldots x_m$ - собств. зн-я матрицы) и позволяет комбинаторно выразить $[L(d\tau)]$ через $[W(\tau')]$

Важный пример: $\tau = (1,0\ldots0) \rightsquigarrow ch\, L(d\tau) = x_1^d + \ldots + x_m^d$. Имеем

$x_1^d + \ldots + x_m^d = S_{(d)}(x_1 \ldots x_m) - S_{(d-1,1)}(x_1 \ldots x_m) - S_{(d-2,1,1)}(x_1, \ldots, x_m) + \ldots + (-1)^d S_{(1^d)}(x_1 \ldots x_m)$

(упр. проверить). Поэтому $ch\, L((d)) = ch\, W((d)) - ch\, W((d-1,1)) + \ldots$

(где мы по разбиениям строим веса) $\rightsquigarrow [L((d))] = [W((d))] - [W((d-1,1))] + \ldots$

1.2) $ch\, L_{\frac{a}{d}}((d))$. Зафикс. $d > 1$ и $a > 0$, $GCD(a,d) = 1$. Из эквив. $\mathcal{O}_c(d) \xrightarrow{\sim}$, $c = \frac{a}{d}$

Случай $\varepsilon = \sqrt[2\alpha]{1}$: $\dot{U}_{\varepsilon}(\mathfrak{gl}'_m) \longrightarrow \dot{U}_{(-1)^\alpha}(\mathfrak{gl}'_m)$, $\cancel{E_i \mapsto 0,\ F_i \mapsto 0}$, $K_j \mapsto K_j$

$$E_i^{(\ell)} \mapsto \begin{cases} E_i^{(\ell/\alpha)}, & \ell \vdots \alpha \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad F_i^{(\ell)} \mapsto \begin{cases} F_i^{(\ell/\alpha)}, & \ell \vdots \alpha \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \binom{K_j}{\ell} \mapsto \begin{cases} \binom{K_j}{\ell/\alpha} \\ 0 \end{cases}, \dots$$

Кроме того, есть явный изоморфизм $\dot{U}_{-1}(\mathfrak{gl}'_m) \xleftrightarrow{\sim} \dot{U}_1(\mathfrak{gl}'_m)$ и $\dot{U}_1(\mathfrak{gl}'_m) \xrightarrow[K_j=1]{} U(\mathfrak{gl}'_m)$.

$Pol_\alpha(\mathcal{U}_\varepsilon)$ получаем $[L_c((\alpha))] = [\Delta_c((\alpha))] - [\Delta_c((\alpha-1,1))] + \dots$

Поэтому $ch\, L_c((\alpha)) = (q^{c_{triv}}[triv] - q^{c_{\mathfrak h}}[\mathfrak h] + q^{c_{\Lambda^2\mathfrak h}}[\Lambda^2\mathfrak h] - \dots)\sum_{i=0}^{\infty} q^i[S^i\mathfrak h]$

Напомним, что $c_{triv} = \frac{-\alpha(\alpha-1)}{2}c = \frac{-(\alpha-1)a}{2}$. Аналогично $c_{(\alpha-i,1^i)} = -\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - i\alpha\right)c = \frac{-(\alpha-1)a}{2} + ia$. Получаем

$$ch\, L_c((\alpha)) = q^{-(\alpha-1)a/2}\left(\sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i [\Lambda^i\mathfrak h] q^{ai}\right)\sum_{i=0}^{\infty} q^i [S^i\mathfrak h].$$

Предложение: $L_c((\alpha))$ кон. мерный модуль градуированной размерности $(1+q+\dots+q^{a-1})^\alpha$

Д-во: градуированный хар-р $L_c((\alpha))$ (как град. фактора $S(\mathfrak h^*)$) — это град. Эйлерова хар-ка комплекса ~~резольвент~~ Кошуля для α эл-тов степени a в $S(\mathfrak h^*)$, и это не зависит от выбора эл-тов. Можем взять $x_1^a, \dots, x_\alpha^a$ и получить требуемое □

Замечание: На самом деле, есть естеств. гомом-зм $\Delta_c((\alpha-i-1,1^{i+1})) \to \Delta_c((\alpha-i,1^i))$. Отн. этих гом-мов получаем комплекс (постр. Березиным-Этингофом-Гинзбургом)

$$0\to\Delta_c(sgn)\to\Delta_c(\Lambda^{\alpha-1}\mathfrak h)\to\dots\to\Delta_c(\mathfrak h)\to\Delta_c(triv)$$

Это резольвента Кошуля для $L_c(triv)$ (т.е вложение $\mathfrak h\hookrightarrow\Delta_c(triv)$ регулярное)

Ниже мы будем рассматривать категорные действия Гейзенберга, и нам будет нужно некоторое частичное обобщение того, что выше

Задача 1: Докажите, что при $n=k\alpha$ имеем следующее равенство в $K_0(\mathcal O_c(k\alpha))$: $\sum_{i=0}^{k} [L_c((k-i)\alpha, \alpha^i)](-1)^i = \sum_{j=0}^{\alpha k}[\Delta_c(k\alpha-j,1^j)](-1)^j$

Замеч*: На самом деле модули Верма справа все ещё образуют комплекс Кошуля, а модули слева — это гомологии (от 0 до k)

2) Пространство Фока как $\hat{\mathfrak{sl}}_b \times \mathfrak{heis}$-модуль

По опр. пр-во Фока $\mathcal F$ — это пр-во, базис которого нумеруется всеми диагр. Юнга (включая пустую), $\tau\mapsto|\tau\rangle\in\mathcal F$. У этого пр-ва есть ещё реализации, в частности, в к-рых легко видеть действие $\mathfrak{heis}\times\hat{\mathfrak{sl}}_b$

А именно, рассмотрим $V = \mathbb C^\alpha\otimes\mathbb C[t^{\pm1}]$. Пусть $v_1,\dots, v_\alpha\in\mathbb C^\alpha$ — станд. базис, и положим $v_{i+j\alpha} = v_i\otimes t^j$ $(1\le i\le\alpha)$. Рассмотрим тенз. пр-во $\Lambda_0^{\infty/2}(\mathbb C^\alpha\otimes\mathbb C[t^{\pm1}])$ с базисом из ~~состоящее из~~ всех полубесконечных векторов $v_{i_0}\wedge v_{i_1}\wedge\dots$, $i_0>i_1>\dots$ т.ч

$c_k = -k$ для $k \geq 0$. На этом пространстве есть действие $\mathfrak{heis} \times \widehat{\mathfrak{sl}}_d$, "индуцированное" с действия на $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$, а именно $\widehat{\mathfrak{sl}}_d$ действует через пономерфизм в $\widehat{\mathfrak{sl}}_d \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, а $\mathfrak{heis}$ действует так: b_i умножает на t^i ~~$(i>0)$, а b_{-i}~~ $(i \neq 0)$

$\Lambda_0^{\infty/2}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ отождествляется с $\mathcal{F}$ так: $v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \ldots$ отправляется в $|\lambda\rangle$, где $\lambda_j = i_j + j$ (так что $\lambda_j = 0$ для $j \gg 0$). Действие $\widehat{\mathfrak{sl}}_d$ опишем на $\mathcal{F}$ легко: ~~Клетка для вычета α mod d, ... вершина ... называется α-квадратом~~

$f_\alpha |\lambda\rangle = \sum |\mu\rangle$, где суммирование ведется по всем μ т.ч. $\mu = \lambda \sqcup \square$, где $\mathrm{cont}(\square) \equiv \alpha \bmod d$. Аналогично $e_\alpha |\lambda\rangle = \sum |\nu\rangle$, где суммирование ведется по всем ν с $\lambda = \nu \sqcup \square$, $\mathrm{cont}(\square) \equiv \alpha \bmod d$. Отметим, что $|\lambda\rangle$ весовой вектор для $\widehat{\mathfrak{sl}}_d$: $h_\alpha |\lambda\rangle = (a_\alpha - r_\alpha)|\lambda\rangle$, где a_α (соотв. r_α) это кол-во $\square$ с $\mathrm{cont}(\square) \equiv \alpha \bmod d$, к-ые можно добавить (соотв. отнять) так, чтобы снова была диаграмма.

Пример: $\lambda = \boxplus$, $d = 2$: $f_0|\lambda\rangle = |\boxplus\rangle + |\boxplus\rangle$, $e_0|\lambda\rangle = |\boxplus\rangle$, $h_0|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$

$$f_1|\lambda\rangle = 0, \quad e_1|\lambda\rangle = 0, \quad h_1|\lambda\rangle = 0$$

(*) Действие $\mathfrak{heis}$ описать сложнее. Для этого отождествим $\mathcal{F}$ с Symm_∞ — пр-во симметричных многочленов от беск. числа переменных: $|\lambda\rangle \mapsto s_\lambda$ (мн-н Шура). С другой стороны можем записать Symm_∞ как $\mathbb{C}[p_1, p_2, p_3, \ldots]$, где p_i i-ый степенной многочлен: $p_i = x_1^i + x_2^i + \ldots$ Тогда b_i действует умножением на p_{di}, а b_{-i} — как $\frac{\partial}{\partial p_{di}}$ (*)

Факт: $\mathcal{F}$ неприводимый $\widehat{\mathfrak{sl}}_d \times \mathfrak{heis}$-модуль $\Leftrightarrow$ пр-во сингулярных векторов одномерно (и натянуто на $|\varnothing\rangle$)

Пусть $\mathcal{F}_n = \mathrm{Span}(|\lambda\rangle \mid \lambda \vdash n)$

3) Категорное представление $\widehat{\mathfrak{sl}}_d$

Напомним, что $K_0(\mathcal{O}_c(n)) = K_0(S_n\text{-rep}) = \mathcal{F}_n$. Поэтому $K_0\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_c(n)\right) = \mathcal{F}$

Наша задача: поднять операторы e_α, f_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, d-1$, до точных эндофункторов $E_\alpha, F_\alpha \curvearrowright \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_c(n)$

А именно имеем функторы ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n-1}} : \mathcal{O}_c(n-1) \to \mathcal{O}_c(n)$ и ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n-1}} : \mathcal{O}_c(n) \to \mathcal{O}_c(S_{n-1})$

Положим $F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n-1}}$, $E = \bigoplus_{n=0}^{\infty} {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n-1}}$ (с ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{S_0}^{S_{-1}} := 0$) — это эндофункторы на $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_c(S_n)$

Т-ма (Шан) Имеем разлож-я $F = \bigoplus_{\alpha=0}^{d-1} F_\alpha$, $E = \bigoplus_{\alpha=0}^{d-1} E_\alpha$ т.ч. $[E_\alpha] = e_\alpha$, $[F_\alpha] = f_\alpha$

Замеч. Определим на $\mathcal{F}$ скалярное пр-е $(|\lambda\rangle, |\mu\rangle) = \delta_{\lambda\mu}$. Тогда f_α сопр. к e_α отн. этого скалярного.

Замеч 2: b_i и b_{-i} тоже сопряжены

Мы построим E_z как "обобщ. собств. подфунктор" в E для эндоморфизма $X \in End(E)$, к-рый на ${}^{\mathcal{O}}Res^{S_{n-1}}_{S_n}$ действует как монодромия при обходе точки 6, к-рая используется для определения функтора. С технической точки зрения удобнее дать эквивалентное алгебраическое определение.

А именно, можем рассм ${}^{\mathcal H}E, {}^{\mathcal H}F \curvearrowright \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_q(n)\text{-mod}$ и $KZ := \bigoplus_n KZ_n : \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_c(n) \to \bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_q(n)\text{-mod}$ с $KZ\circ E \simeq {}^{\mathcal H}E\circ KZ$, (и $KZ\circ F = {}^{\mathcal H}F\circ KZ$)

Мы построим автоморфизм ${}^{\mathcal H}E$, а потом д-м, что $End(E) = End({}^{\mathcal H}E)$

Автоморфизм X для ${}^{\mathcal H}E$: ${}^{\mathcal H}E_n = {}^{\mathcal H}Res^{n-1}_n$. Любой эл-т $X_n \in \mathcal{H}_q(n)$ коммут. с $\mathcal{H}_q(n-1)$ дает эндоморфизм ${}^{\mathcal H}E_n$ (посредством действия на модуле). Мы возьмем элемент Юциса-Мерфи $X_n = T_{n-1}T_{n-2}\dots T_2 T_1^2 T_2 \dots T_{n-1}$. Прямая сумма $\bigoplus_{n\geq 0} X_n$ дает треб. автоморфизм (X_n обратимы) функтора ${}^{\mathcal H}E$.

То, что $End(E)=End({}^{\mathcal H}E)$ следует из такой задачи

Задача 2: Пусть A, A', B, B' — кон. мерные алгебры, $\pi: A\text{-mod} \to B\text{-mod}$, $\pi': A'\text{-mod}\to B'\text{-mod}$ — фактор-функторы, $E_A: A\text{-mod}\to A'\text{-mod}$, $E_B: B\text{-mod}\to B'\text{-mod}$ — точн. функторы т.ч.

(1) $\pi'\circ E_A \simeq E_B\circ\pi$

(2) π,π' строго полны на проективных

(3) E_A переводит проективные в проективные

Тогда $End(E_A) = End(E_B)$. Более того, функтор E_A с такими св-вами восст. однозначно

Мы применяем эту задачу к $A\text{-mod}\simeq \mathcal{O}_c(n)$, $A'\text{-mod}\simeq\mathcal{O}_c(n-1)$, $B\text{-mod} = \mathcal{H}_q(n)$, $B' = \mathcal{H}_q(n-1)$, $\pi = KZ_n$, $\pi' = KZ_{n-1}$, $E_A = {}^{\mathcal O}E_n$, $E_B = {}^{\mathcal H}E_n$.

Мы получаем $X\in End(E)$. Для $z\in\mathbb{C}^\times$ можем определить E_z посредством $E_z(M)$ = обобщ. собств. пр-во для X_M в $E(M)$ с собств. зн-ем z. (а морфизм $EM\to EN$ индуц. с $M\to N$ переводит $E_z(M)$ в $E_z(N)$, поэтому это функтор). Поскольку все объекты в $\bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{O}_c(n)$ кон. длины $\Rightarrow E(M) = \bigoplus_{z\in\mathbb{C}^\times} E_z(M) \Rightarrow E = \bigoplus_{z\in\mathbb{C}} E_z$

Предложение: $E_z\Delta_c(\tau)$ фильтрован всеми $\Delta_c(\tau')$ (каждый с кратн. 1), где $\tau = \tau'\sqcup\square$ и $q^{cont(\square)} = z$.

Д-во: $E\Delta_c(\tau)$ сначала фильтрован, и факторы — это $\Delta_c(\tau')$ с кратн. 1, $\tau'\sqcup\square=\tau$ (это то как устроены ограничения с S_n на S_{n-1})

ибо Hom в сторону вверх нет

В этой фильтр. стандартные расположены по убыванию совершенного квадратика (Ext'ы в одном направл. исчезают) Любой автоморфизм сохраняет фильтрацию.
Т.е. нам надо ~~.....~~ убедиться что X действует на подфакторе $\Delta_c(\tau')$ умножением $q^{\mathrm{cont}(\tau\setminus\tau')}$. Но этот скаляр непрерывен по c поэтому дост. рассм. общее c. Здесь $\mathcal{O}_c(S_n)$ полупроста и $KZ_{n-1}: \mathcal{O}_c(S_{n-1}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_q(S_{n-1})$-mod эквив.

Классиф-я неприводимых для $\mathcal{H}_q(S_{n-1})$ может быть проведена "по Вершику-Окунькову" и $KZ_{n-1}(\Delta_c(\tau'))$-простой соотв. τ'. Утверждение, что X_n действует на слагаемом соотв. τ' в τ умножением $q^{\mathrm{cont}(\tau\setminus\tau')}$ стандартно (заметим, что в классической ситуации S_n элемент Юциса-Мэрфи действует на $\tau'\subset\tau$ умножением $\mathrm{cont}(\tau\setminus\tau')$) □

Следствие: $\alpha=0,1,\dots,d-1 \Rightarrow [E_{q^\alpha}]=e_\alpha$ (ниже пишем E_α вместо E_{q^α})
~~Отметим, что по сопр.~~ Перейдем к конструкции F_α. По сопр $\mathrm{End}(F)=\mathrm{End}(E)^{opp}$. Это дает нам $X\in\mathrm{End}(F) \rightsquigarrow F=\bigoplus_\alpha F_\alpha$. Отметим, что F_α - прав. сопр к E_α, а поэтому (аргумент в лек. 3) $[F_\alpha]$ сопрям. к $[E_\alpha]$, т.е. $[F_\alpha]=f_\alpha$. Мы построили треб. функторы.

Замеч: На самом деле у нас больше стр-ры: мы построили "категорное действие" алгебры $\hat{\mathfrak{sl}}_d$ на $\bigoplus_n \mathcal{O}_c(n)$. Это включает в себя эндофункторы E, F с фикс. сопряженностью, $X\in\mathrm{End}(E)$, $T\in\mathrm{End}(E^2)$. T берется вот отсюда.

Задача 3: Пусть $W''\subset W'\subset W$ - параб. подгруппы. Тогда имеется изоморфизм функторов ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_W^{W''} = {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{W'}^{W''}\circ {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_W^{W'}$.

Т.е. $E^2=\bigoplus_{n\geq 0} {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_n^{n-2}$, и у этого сл. эндом-м T приходящий с T_{n-1} на ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_n^{n-1}$.
Еще имеется куча аксиом (включая, что на K_0 получаем действие $\hat{\mathfrak{sl}}_d$)

3.4) Действие Heis. Для $\tau\vdash m$, пусть $d\tau\vdash dm$ дается $(d\tau_1, d\tau_2,\dots)$. Определим $B_\tau^n: \mathcal{O}_c(n)\to\mathcal{O}_c(n+dm)$ как $\mathrm{Ind}_{S_{n+md}}^{S_n\times S_{md}}(\bullet\boxtimes L_c(d\tau))$ и $B_\tau=\bigoplus_n B_\tau^n$

Лемма: Имеем $\sum_{i=0}^m (-1)^i \left[B_{(d(m-i),d^i)}\right] = b_m$ (Гейзенбергов генератор)

Д-во: Отождествим $\bigoplus_{n\geq 0}K_0(\mathcal{O}_c(n))$ с кольцом симметрич. функций. Тогда $[\mathrm{Ind}_{S_{k+l}}^{S_k\times S_l}]$ - это умножение симметрических функций степеней k, l

По задаче 1, $\sum_{i=0}^{m-i}(-1)^i[L(d(m-i),d^i)] = \sum_{i=0}^{dm-i}(-1)^i[\Delta(dm-i,1^i)]$. Но, как симметрическая функция — это p_{dm}, и утверждение следует. □

Рассмотрим теперь правый (производный) сопряженный к B^n_τ. Это $RB^{n*}_\tau := RHom_{O_c(d\tau)}(L_c(d\tau), Res^{S_n\times S_{md}}_{S_{n+md}}(\cdot))$ (функтор ограничения берёт из $O_c(n+md)$ в $O_c(n)\boxtimes O_c(md)$ и $RHom$ убирает $O_c(md)$ компоненту). Положим $RB^*_\tau = \bigoplus_n RB^{n*}_\tau$

Следствие: $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i[RB^*_{(d(m-i),d^i)}] = \delta_{1m}$

Замечание: Аксиоматического определения, что такое категорное действие алгебры Гейзенберга нет, хотя есть несколько конструкций. Такое действие должно включать в себя один генератор $B_{(1)}$ т.ч. на $B^m_{(1)}$ действует S_m и функтор $RB^*_{(1)}$, который становится левым сопряженным после гомологического сдвига. То, что непонятно, это какие ещё морфизмы функторов надо добавить

Задача 4: Построить действие S_m на $\mathrm{Ind}^{S_{dm}}_{S_d^m} L((d))^{\boxtimes m}$ т.ч. этот объект раскладывается как $\bigoplus_{\tau\vdash m} L(d\tau)\boxtimes\tau$

5) Конечномерные представления в $O_c(S_n)$ ($\mathfrak{h}$-конеч-х кер-п) — были классифицированы Берестом–Гинзбургом и Этингофом

более элементарными методами. Но метод, которым мы воспользуемся, основанный на категорных действиях работает и в более общей ситуации (для B_n и циклот. групп большего порядка)

Теорема: Если $H_c(S_n)$ имеет кон. мерное неприв. предст., то $c=\frac{a}{n}$ и это предст-е $L_c(triv)$ для $c>0$ и $L_c(sgn)$ для $c<0$

Д-во: Можем предп. $c>0$. Отметим, что пополнение кон. мерного представления L в любой ненулевой точке b равно 0 (как пучок на $\mathfrak{h}$ оно сосредоточено в 0, ибо оно допускает градуировку). Поэтому для $W'\neq W$, то $Res^{W'}_W L=0$. Отсюда $E_\alpha L=0$ $\forall\alpha$.

(здесь α — знамен. c). [~~Также, если $n>d$, то функторы $RB^{n,*}_c$ включают собств. огранич. поэтому аннулируют L. Отсюда $\dot e_\alpha[L]=\delta_{-i}[L]=0$ $\forall\alpha\in\{0,..,d-1\}$, $i>0$. Т.е L совпадает с $|\phi\rangle$ — а это мы не рассматриваем. Т.е $n=d$, а $[L]$ лежит в Fock модуле порожд. $|\phi\rangle$, т.е $[L]=\delta_1|\phi\rangle$. Мы получили, что пр-во $Span\{[L]\}$ одномерно, т.е $L=L_c(triv)$~~

Из $e_\alpha[L]=0$ и кепр $\mp$ след. □]

См. на обороте

Но все сингул векторы для $\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell$ — это $\ker(\phi)$. Элементы здесь — это симм полиномы от перем $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots$ Т.е базис в $\ker(\phi)_{m\alpha}$ — это $[L(\lambda_i)]$ т-м (они соотв $s_i(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots)$). Но по задаче 4, каждый $L(\lambda_i)$ — это слагаемое в итоге объекте $(\mathrm{Ind}_{S_{m\alpha}}^{S_\alpha^m} L_c((\alpha))^{\boxtimes m})$. Поэтому, при $|c|>1$, этот объект не конечномерный (что ${}^c\mathrm{Res}_{S_{m\alpha}}^{S_\alpha^m}$ от него не равна 0). $\square$