Лекция 6. Эквивалентность Каждана-Люстига

1) Аффинная категория $\mathcal{O}$ и подкатегория KL

2) Эквивалентность категорий

3) Fusion-произведение

1) Наша задача в этой лекции — установить эквивалентность между категорией $U_\varepsilon(\mathfrak{gl}_m)$-mod (напомним, что эта категория всех конечномерных модулей V над U_ε с весовым разложением $V=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$) и некоторой категорией модулей над $\hat{\mathfrak{gl}}_m$, категорией Каждана-Люстига.

1.1) Алгебра $\hat{\mathfrak{gl}}_m$. По определению — это $\mathfrak{gl}_m[t^{\pm1}]\oplus\mathbb{C}C$ со скобкой $[xt^k, yt^l]=[x,y]t^{k+l}+\delta_{k+l,0}\,k\,tr(xy)C$, где C — центральный элемент. Это (почти) алгебра Каца-Муди с картановскими генераторами e_i, f_i, h_i, $i=0,\dots,m-1$, где $e_i=E_{i,i+1}$, $i=1..m-1$, $e_0=tE_{m,1}$, $f_i=E_{i+1,i}$, $f_0=t^{-1}E_{1,m}$, $h_i=E_{ii}-E_{i+1,i+1}$, $h_0=C+E_{m,m}-E_{1,1}$. В частности, у нас есть треугольное разложение $\hat{\mathfrak g}=\hat{\mathfrak n}^-\oplus\hat{\mathfrak t}\oplus\hat{\mathfrak n}^+$ с $\hat{\mathfrak n}^-=t^{-1}\mathfrak{gl}_m[t^{-1}]\oplus\mathfrak n^-$, $\hat{\mathfrak t}=\mathfrak t\oplus\mathbb{C}C$, $\hat{\mathfrak n}^+=t\mathfrak{gl}_m[t]\oplus\mathfrak n^+$.

убрать [Группа Вейля для $\hat{\mathfrak g}$ — это аффинная симметрическая группа $\hat S_m=S_m\ltimes Q$, где Q — корн. решетка для $\mathfrak{gl}_m$.

Замеч. Одна техническая проблема с $\hat{\mathfrak{gl}}_m$ — что естественное инвариантное спаривание $\hat{\mathfrak t}\times\hat{\mathfrak t}^*\to\mathbb C$ вырождено. Чтобы это исправить рассматривают большую алгебру $\tilde{\mathfrak{gl}}_m=\hat{\mathfrak{gl}}_m\oplus\mathbb{C}d$ с $[d,C]=0$, $[d,xt^k]=kxt^k$. Получаем базис E_{ii}, $i=1..m$, $\underbrace{\ ,\ d\in\tilde{\mathfrak t}}_{h_0=C-E_{m,m}+E_{1,1}}$ и двойств. базис ε_i, $i=1..m$, ω_0, δ в $\tilde{\mathfrak t}^*$.

1.2) Категория $\hat{\mathcal O}_\kappa$ ($\kappa\in\mathbb C$) состоит из всех $M\in \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$-mod т.ч.

(1) M кон. порожд. / $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak n}^-)$

(2) E_{ii} д-т на M диагонально с собств. зн-ями $\in\mathbb Z$, C д-т скаляром $-m+\kappa$

(3) $\hat{\mathfrak n}^+$ д-т локально нильп.

~~Нас будет интересовать случай~~

Пример: модули Верма: $\lambda\in\mathbb Z^n \rightsquigarrow \Delta_\kappa(\lambda):=\mathcal{U}(\hat{\mathfrak g})\otimes_{\mathcal{U}(\hat{\mathfrak b})}\mathbb{C}_\lambda$

Имеется четыре разных случая параметра κ:

(0) $\kappa \notin \mathbb{Q}$: $\hat{\mathcal{O}}_\kappa$ распадается в сумму (целых блоков) в $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}_m^\vee)$ — не интересно

(1) $\kappa \in \mathbb{Q}_{>0}$ (положительный уровень)

(2) $\kappa \in \mathbb{Q}_{<0}$ (отрицательный уровень)

(3) $\kappa = 0$ (критический уровень) (*) Операторы Шугавары

Нас будет интересовать случай $\underline{\kappa<0}$. Для $\kappa \neq 0$ "оператор Шугавары" $L_0 \in \hat{U}(\hat{\mathfrak{gl}}_m^\vee)[\kappa^{-1}]$ действует на модуле из $\hat{\mathcal{O}}_\kappa$ и $d \mapsto L_0$ продолжает модуль до представления $\tilde{\mathfrak{gl}}_m^\vee$. Иными словами, модули из $\hat{\mathcal{O}}_\kappa$ допускают внутреннюю градуировку. А это дает "теорию старшего веса".

А именно, имеет место след:

(i) У любого $\Delta_\kappa(\lambda)$ есть единств. простой фактор $L_\kappa(\lambda)$, и это все неприводимые.

(ii) ~~Δ_κ~~ Введем на Λ порядок ~~[illegible]~~: вложим Λ в $\tilde{\mathfrak{t}}^*$ параметром

$\iota: (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i + \kappa\omega_0 + \cancel{\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_m}{2\kappa}} \frac{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - i)^2}{2\kappa}\delta$ — это то как $\tilde{\mathfrak{t}}$ д-т на старшем простр-ве в $\Delta_\kappa(\lambda)$. Это дает порядок на Λ: $\lambda \le \mu \iff \iota(\mu) - \iota(\lambda)$ — это сумма полож. корней. Несложно видеть (последнее слагаемое положительное), что этот порядок ограничен снизу: для каждого μ, $\{\lambda \mid \lambda \le \mu\}$ конечно

(iii) Отсюда можно вывести, что каждый ~~$\Delta_\kappa(\lambda)$~~ $M \in \hat{\mathcal{O}}_\kappa$ имеет конечную длину.

(iv) Серровская оболочка $L_\kappa(\lambda)$ с $\lambda \le \mu$ — это старшевесовая категория $\forall \mu$. Стандартные — это модули Верма.

1.3) Категория Каждана-Люстига: $KL_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_m^\vee)$, $(\kappa<0)$ состоит из всех модулей $M \in \hat{\mathcal{O}}_\kappa$, на которых $\mathfrak{gl}_m^\vee[t]$ действует локально конечно (т.е. это параболическая подкатегория). Простой $L_\kappa(\lambda) \in KL_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_m^\vee) \iff \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ (т.е. λ домин.)

Из опр-я: $KL_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_m^\vee)$ — Серровская подкатегория, т.е. она является Серровской оболочкой $L_\kappa(\lambda)$, λ домин.

Более того, можно определить параболические модули Верма $\Delta_\kappa^{KL}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{gl}_m^\vee[t] \oplus \mathbb{C}c}^{\hat{\mathfrak{gl}}_m^\vee} V(\lambda)$, где $V(\lambda)$ — непр. предст. $\mathfrak{gl}_m^\vee$ со ст. весом λ и c д-т умножением κ-м. Опять же $\forall$ домин. μ Серровская оболочка ~~$\Delta_\kappa^{KL}(\lambda)$~~ $L_\kappa(\lambda)$, $\lambda \le \mu$, λ домин — это старшевесовая категория ~~[illegible]~~ с пополнение

(*) Имеем $L_i \in \hat{U}(\hat{\mathfrak{g}})[(C+m)^{-1}]$ с $[L_i, x\otimes t^k + \alpha C] = t^{i+1}\frac{d}{dt}(x\otimes t^k)$ (а сами L_i удовл. соотн. алг-ы Вирасоро). Кроме того, пополнение таково, что все L_i д-т на модулях и $\mathcal{O}_k(\hat{\mathfrak{g}})$

порядком ограничений с Λ и стандартными $\Delta_k^{KL}(\lambda)$

2) Эквивалентность категорий

Т-ма (Каждан-Люстиг) Есть эквивалентность категорий $\dot{U}_\varepsilon\text{-mod} \xrightarrow{\sim} KL_k(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$

$\varepsilon = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{k}\right)$, она переводит $W(\lambda) \mapsto \Delta_k^{KL}(\lambda)$

Это в частности позволяет посчитать кратности $[W(\lambda):L(\mu)]$ в $\dot{U}_\varepsilon$-mod, ибо они такие же, как в $KL_k(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$. А именно, $[\Delta_k^{KL}(\mu)] = \sum_{w\in S_n} sgn(w)[\Delta_k(w(\lambda+\rho)-\rho)]$ (т.е. формула Вейля — это потому, что $Ind_{\mathfrak{g}[t]}^{\hat{\mathfrak{g}}} \circ Ind_{\mathfrak{n}}^{\mathfrak{g}} = Ind_{\hat{\mathfrak{n}}_+}^{\hat{\mathfrak{g}}}$ и все функторы точные), а $[\Delta_k(\lambda):L(\mu)]$ даются значениями в 1 полиномов КЛ

Т-ма сложная (4 статьи) и мы сосредоточимся на главном ингредиенте fusion-произведении $KL_k(\hat{\mathfrak{g}})^{\boxtimes 2} \to KL_k(\hat{\mathfrak{g}})$. Штука в том, что $\dot{U}_\varepsilon$-mod braided моноидальная категория, и мы бы хотели получить такую структуру и на $KL_k(\hat{\mathfrak{g}})$, которая, a posteriori, согласовалась бы с эквивалентностью (для построения которой будет использован таннакиев формализм).

3) Fusion-произведение (КЛ) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m$

3.1) Коинварианты. Обозн. $S\subset \mathbb{P}^1$ кон. мн-во $\rightsquigarrow R_S = \mathbb{C}[\mathbb{P}^1\setminus S] \rightsquigarrow \mathfrak{g}_S = \mathfrak{g}\otimes R_S$

$\sigma\in S \rightsquigarrow R_\sigma$ - ряды Лорана = локализация $\mathcal{O}^{\wedge_\sigma}_{\mathbb{P}^1} \rightsquigarrow \mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{g}\otimes R_\sigma$ и

$\hat{\mathfrak{g}}_\sigma = \mathfrak{g}_\sigma \oplus \mathbb{C}c_\sigma$, $[x\otimes P, y\otimes Q] = [x,y]\otimes PQ + tr(xy)\, Res_0\, QdP\cdot c_\sigma$

$\rightsquigarrow \hat{\mathfrak{g}}_S = \left(\bigoplus_{\sigma\in S}\hat{\mathfrak{g}}_\sigma\right)/(c_\sigma - c_{\sigma'}) = \left(\bigoplus_\sigma \mathfrak{g}_\sigma\right)\oplus\mathbb{C}c$

$P\in R \rightsquigarrow$ образу P_σ в $R_\sigma \rightsquigarrow \mathfrak{g}_S \hookrightarrow \bigoplus_\sigma \mathfrak{g}_\sigma$, $x\otimes P\mapsto (x\otimes P_\sigma)_{\sigma\in S}$

Лемма: $\mathfrak{g}_S$ - подалг. в $\hat{\mathfrak{g}}_S$

Д-во: для $\omega\in\Omega^1_{\mathbb{P}^1\setminus S} \Rightarrow \sum_{\sigma\in S} Res_\sigma\,\omega = 0$, поэтому коцикл в $\hat{\mathfrak{g}}_S$ нуль на $\mathfrak{g}_S$ □

Выберем теперь $M_\sigma\in KL_k(\hat{\mathfrak{g}})$ $\forall \sigma\in S \rightsquigarrow$

Д-е $\hat{\mathfrak{g}}$ на M_σ продолж. до д-я $\hat{\mathfrak{g}}_\sigma$ уровня k (ибо, благодаря весовому разложению, веса в х-ом ограничены сверху, $\forall m\in M_\sigma$, $xt^k\cdot m = 0$ для $k\gg0$) и можем рассмотреть $\bigoplus_{\sigma\in S}\hat{\mathfrak{g}}_\sigma$-модуль $\bigotimes_{\sigma\in S} M_\sigma$. Он пропускается через

$\hat{\mathfrak g}_S$ ибо все модули M_σ имеют одинаковый уровень $\rightsquigarrow \mathfrak g_S \curvearrowright \bigotimes_{\sigma\in S} M_\sigma$

Мы рассм. пр-во коинвариантов $\langle M_\sigma | \sigma\in S\rangle := \bigotimes_{\sigma\in S} M_\sigma / \mathfrak g_S \cdot \bigotimes_{\sigma\in S} M_\sigma$.

Для начала вычислим его для индуц. модулей $M_\sigma = \Delta_k^{KL}(V)$, где V — это $\hat{t}^*$-градуированный конечномерный $\mathfrak g[[t]]$-модуль

Предложение: $\langle \Delta_k^{KL}(V_\sigma) | \sigma\in S\rangle \simeq \bigotimes_{\sigma\in S} V_\sigma / \mathfrak g \cdot (\bigotimes_{\sigma\in S} V_\sigma)$

Д-во: Пусть $\mathfrak g_+ = \bigoplus_\sigma (\mathfrak g \otimes \mathcal O_{\mathbb P^1}^{\wedge\sigma}) \oplus \mathbb C C$ — полож. часть в $\hat{\mathfrak g}_S$. Мы утверждаем, что $\mathfrak g_+ + \mathfrak g_S = \hat{\mathfrak g}_S$ и $\mathfrak g_+ \cap \mathfrak g_S = \mathfrak g$. Это следует, что для произвольных эл-тов $p_\sigma \in R_\sigma / \mathcal O_{\mathbb P^1}^{\wedge\sigma}$ ("сингул. части"), $\exists P \in R_S$ т.ч. $P \equiv p_\sigma \mod \mathcal O_{\mathbb P^1}^{\wedge\sigma}$ и эл-т P определен однозначно с точн. до константы. Теперь наше утверждение сводится к

Задача 1: Пусть $\mathfrak g_1, \mathfrak g_2$ — подалгебры в $\mathfrak g$ с $\mathfrak g_1 + \mathfrak g_2 = \mathfrak g$ и V — $U(\mathfrak g_1)$-модуль. Имеется естеств. изоморфизм $\mathrm{Ind}_{\mathfrak g_1}^{\mathfrak g} V / \mathfrak g_2 \, \mathrm{Ind}_{\mathfrak g_1}^{\mathfrak g} V \xleftrightarrow{\sim} V/(\mathfrak g_1 \cap \mathfrak g_2)V$. □

Сл-я: 1) функтор $\langle \circ | \sigma\in S\rangle$ ацикличен на индуцированных модулях.

~~(и их прямых слагаемых)~~

2) $\dim \langle M_\sigma | \sigma\in S\rangle < \infty$ и не зависит от выбора σ.

Д-во: ~~Аналогично с PA4, проективны в KL~~,

Утверждение задачи 1 переносится на производные функторы индукции (отметим, что из правой части в левую есть ест. отобр.) ~~...~~, откуда следует 1). ~~...~~ Для д-ва 2, отметим, что ~~...~~ любой M_σ допускает резольвенту из прямых слагаемых индуц. модулей — любой проективный в $KL_k(\hat{\mathfrak g})_{\le\mu} = \mathrm{Serre\ span}(L(\lambda), \lambda\le\mu)$ реализуется как прямое слагаемое индуцированного, доказательство аналогично случаю PA4. По 1) утверждение сводится к случаю, когда $\forall M_\sigma$ индуцированы. Предложение обрабатывает этот случай □

3.2) Случай двух точек. Мы опишем бифунктор $\langle \circ_{\sigma_1}, \circ_{\sigma_2} | S\rangle : KL_k(\hat{\mathfrak g})^{\boxtimes 2} \to Vect$

Предложение: Имеем бифункториальный изоморфизм $\langle M_{\sigma_1}, M_{\sigma_2} | S\rangle \simeq \mathrm{Hom}_{KL_k(\hat{\mathfrak g})}(V_1, \mathbb D V_2)^*$, где $\mathbb D: KL_k(\hat{\mathfrak g}) \circlearrowleft$ — контравариантная двойственность, к-рую мы сейчас построим

Аналогично, для $\tilde{\mathfrak g}$-модуля M с весовым разложением $M=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak t^*} M_\lambda$, где $\dim M_\lambda<\infty$, можем рассмотреть ограниченный двойственный $M^\vee=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak t^*} M_\lambda^*$ – это $\tilde{\mathfrak g}$-модуль, где C действует умножением на $-k$. Понятно, что он не лежит в $KL_{-k}(\hat{\mathfrak g})$ (локально нильпотентно будет действовать $t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}]$. Но можем рассмотреть автоморфизм $\#:\tilde{\mathfrak g}\to\tilde{\mathfrak g}$: $xt^k\mapsto xt^{-k}$, $C\mapsto -C$, $d\mapsto -d$. Подкрутка ${}^\# M^\vee\in KL_k(\hat{\mathfrak g})$ и мы полагаем $\mathbb D(M)= {}^\# M^\vee$.

Д-во предложения: можем считать, что $\sigma_1=0$, $\sigma_2=\infty$

Задача 2: Докажите $\langle M_1,M_2\mid\{0,\infty\}\rangle^*\simeq (M_1\otimes_{\hat{\mathfrak g}}{}^\# M_2)^* = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak g}}(M_1,\mathbb D M_2)$

3.3) Fusion произведение: Пусть $S=\{\infty,\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ и $S'=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$

Т-ма: Существует (автоматически единственный) функтор $\bigotimes_{S'}: KL_k(\hat{\mathfrak g})^{\boxtimes n}\to KL_k(\hat{\mathfrak g})$ с функториальным изоморфизмом $\langle\bigotimes_{S'} M_{\sigma_i}, M_\infty\rangle_{0,\infty}=\langle M_{\sigma_1},\dots,M_{\sigma_n},M_\infty\rangle_S$

~~Д-во~~:

Схема д-ва: ~~Мы хотим д-ть, что функтор~~ Напомним, что $\langle ?, M_\infty\rangle^*_{0,\infty}=\mathrm{Hom}_{KL_k(\hat{\mathfrak g})}(?,\mathbb D M_\infty)$, т.е. мы хотим д-ть, что функтор $M_\infty\mapsto\langle M_{\sigma_1},\dots,M_{\sigma_n},M_\infty\rangle_S^*$ представим – представляющий объект будет $\bigotimes_{S'} M_{\sigma_i}$. ~~Если~~ Наш функтор точен слева. Если бы $KL_k(\hat{\mathfrak g})$ была категорией модулей над конечномерной алгеброй – то результат был бы стандартным. $KL_k(\hat{\mathfrak g})$ таковой не является, но является "объединением" таких категорий, ($KL_k(\hat{\mathfrak g})=\bigcup_{\mu\in\Lambda^+} KL_k(\hat{\mathfrak g})_{\le\mu}$). Остается доказать, что представляющий объект в $KL_k(\hat{\mathfrak g})_{\le\mu}$ стабилизируется. Грубо говоря, надо вычислить для индуцированных модулей, и увидеть, что стабилизируется для них, а это следует из явной формулы для коинвариантов: скажем:

$\langle\Delta_k^{KL}(\lambda_1),\dots,\Delta_k^{KL}(\lambda_n),\Delta_k^{KL}(\lambda_\infty)\rangle = V(\lambda_1)\otimes\dots\otimes V(\lambda_\infty)/\mathfrak g\, V(\lambda_1)\otimes\dots\otimes V(\lambda_\infty)$

$=0$, если ~~λ_∞^* не лежит в~~ $V(\lambda_\infty)^*$ не встречается в $V(\lambda_1)\otimes\dots\otimes V(\lambda_n)$

34) Плоская связность. Рассмотрим $\langle M_{\sigma_1} \dots M_{\sigma_n}, M_\infty \rangle_S$ — это слои ~~[illegible]~~ (когерентного) расслоения на $C_n = \{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sigma_i \neq \sigma_j\}$. Более того, оно приходит с плоской связностью: на каждом M_{σ_i} действует свой оператор Шугаварa $L_{-1,i}$ ("внутреннее дифференцирование" по параметру вокруг σ_i) и мы хотим, чтобы на плоских сечениях ∂_{σ_i} действовал как $L_{-1,i}$, т.е. связность ∇ задается как $d - \sum_{i=1}^{n} L_{-1,i}\, d\sigma_i$ — она спускается на коинварианты. Иными словами $\bigotimes_{S^1} M_{\sigma_i}$ — это лок. система на C_n — а это и означает, что $KL_k(\hat{\mathfrak{g}})$ — braided моноидальная категория. (*)

Мы закончим это примером вычисления — что дает связность Книжника-Замолодчикова.

Пример: Пусть $V_1 \dots V_n$ — $\mathfrak{g}$-модули, пусть Ω_{ij} — тензор Казимира (для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ — это $\sum_{k,l=1}^{n} E_{kl} \otimes E_{lk}$), действующий на i-ом и j-ом тензорном множителе.

Связность KZ — на трив. вект. расслоении со слоем $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ и матрицей связности $\frac{1}{k} \sum_{i<j} \frac{\Omega_{ij}}{\sigma_i - \sigma_j}\, d(\sigma_i - \sigma_j)$. Отметим, что матрица связности $\mathfrak{g}$-инвариантна (отн. диаг. действия). Поэтому она дает связность на $V_1 \otimes \dots \otimes V_n \otimes V_\infty / \mathfrak{g}(V_1 \otimes \dots \otimes V_\infty)$.

И это связность на $\langle \Delta_k^{KL}(V_1), \dots \Delta_k^{KL}(V_\infty) \rangle_S$.

(*) ~~Точнее надо сказать, что для $M_{\sigma_1} = \dots = M_{\sigma_n}$ получаем~~ S_n-эквив. как система на C_n ~~S_n-инв. эквив. как систему со слоем $\bigotimes_{S^1} M_{\sigma_i}$. В общем случае~~ возьмем $\bigotimes_{S^1} (M_{\sigma_1} \oplus \dots \oplus M_{\sigma_n})$. Монодромия по контуру вокруг $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ дает braiding в комп-х $i, i+1$.