Лекция 7 (и последняя!!!). Категория $\mathcal{O}$ для РАЧ типа B.

1) Предст-я W и $\mathcal{H}_{q,Q}(n)$

2) Конечномерные неприводимые

3) Связь с $\hat{\mathcal{O}}_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$

1) Мы рассматриваем $W = \underbrace{S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n}_{=W_n} \curvearrowright \mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$. В W есть два класса сопр. отражений: $S_0 = \{s_{\varepsilon_i}, i=1..n\}$, $S_1 = \{s_{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j} \mid i<j\}$. Соотв. параметром для РАЧ служат $(c_0, c) \in \mathbb{C}^2$.

1.1) Представления W — параметризуются бимультиразбиениями $(\tau_0, \tau_1) \vdash n$ (т.е. парами диаграмм Юнга с общим числом клеток $= n$). А именно, пусть $|\tau_i| = n_i$. Рассмотрим подгруппу $W_{n_0,n_1} = S_{n_0} \times S_{n_1} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ и её предст-е $\tau_0^1 \boxtimes \tau_1^{-1}$ (где все эл-ты в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в первых n_0 позициях действуют единицей, а все элементы в последних n_1 позициях — -1). Представление W соотв. (τ_0, τ_1) — это $\mathrm{Ind}_{W_{n_0} \times W_{n_1}}^{W} \tau_0^1 \boxtimes \tau_1^{-1}$.

Т.о. $\bigoplus_n K_0(\mathcal{O}_{c_0,c}(W_n)) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ (произведение двух пространств Фока а.к.а. пр-во Фока уровня 2)

1.2) Алгебра Гекке и её представления. Алгебра $\mathcal{H}_{q,Q}(W)$ задаётся так: образующие $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ с соотн.: $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$

(i) алгебра Гекке с параметром q для $T_1 \dots T_{n-1}$ (мы пишем квадр. т-ва как ↘)

(ii) $T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0$, $T_0 T_i = T_i T_0$ $(i>0)$

(iii) $(T_0 - Q_0)(T_0 - Q_1) = 0$ для $Q_0, Q_1 \in \mathbb{C}^\times$ (конечно алг-а зависит только от Q_1/Q_0)

Параметры q, Q_0, Q_1 восстанавливаются по c_0, c так: $q = -\exp(-2\pi\sqrt{-1}c)$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = \exp(-2\pi\sqrt{-1}c_0)$

Отметим также, что (i), (ii) задают т.н. аффинную алгебру Гекке $\mathcal{H}_q^{aff}(n)$. Определим элементы $X_1 \dots X_n$ в этой алгебре: $X_1 = T_0$, $T_i X_i T_i = q X_{i+1}$. Несложно видеть, что эти элементы коммутируют между собой (это эл-ты Юциса-Мерфи). Т.е. $\mathcal{H}_{q,Q}(W) = \mathcal{H}_q^{aff}(n)/((X_1 - Q_0)(X_1 - Q_1))$. Отметим также, что $\pi_1(((\mathbb{C}^\times)^n)^{reg}/S_n)$ задаётся соотн. как на $T_1 \dots T_{n-1}$ и (ii). Т.е. $\mathcal{H}_{q,Q}(W)$ — фактор $\mathbb{C}\pi_1(\dots)$ по соотн. Гекке

$H_{q,Q}(W_n)$ полупроста

Предложение: Предположим, что все числа q^iQ_0, q^jQ_1 ($i,j\in\mathbb{Z}$) различны. Тогда предст-я $H_{q,Q}(W_n)$ параметризуются бипартициями числа n, $(\tau_0,\tau_1)\mapsto V_{(\tau_0,\tau_1)}$. При этом ограничение $V_{(\tau_0,\tau_1)}|_{H_{q,Q}(W_{n-1})} = \bigoplus V_{(\tau_0,\tau_1)\setminus\square}$, где сумма берется по всем квадратикам в (τ_0,τ_1) при удалении к-ых снова получается пара диаграмм. Эл-т X_n (централизующий $H_q^{aff}(n-1)\subset H_q^{aff}(n)$) д-т на $V_{(\tau_0,\tau_1)\setminus\square}\subset V_{(\tau_0,\tau_1)}$ скаляром $Q_k q^{\mathrm{cont}(\square)}$, где k - номер диаграммы где лежит $\square$.

Д-во: вычисление.

2) Конечномерные неприводимые

2.1) Категорное действие: Рассмотрим функторы $E=\bigoplus_{n=0}^{\infty} {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}^{W_{n-1}}_{W_n}$, $F=\bigoplus_{n=0}^{\infty} {}^{\mathcal{O}}\mathrm{Ind}^{W_{n-1}}_{W_n}$ $\curvearrowright \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{c_0,c}(W_n)$. По тем же причинам, что и в типе A, они разлагаются по собств. значениям эндофунктора X, который on слагаемом #n соответствует $X_n\in H_q^{aff}(n)$. Его собств. значения имеют вид $Q_k q^{l}$ ($k=0,1$). Поэтому самый интересный случай – это когда q – корень из единицы, т.е. $c=\frac{a}{\ell}$ (мы считаем $a>0$, $GCD(a,\ell)=1$), а Q_1/Q_0 – это степень q. Этот случай мы и будем рассматривать. Положим $c_0 = c(s_1-s_0)-\frac{1}{2}$ т.ч. м. сч. $Q_k=q^{s_k}$, мы считаем $s_1, s_0\in\mathbb{Z}$.

Мы получаем категорное действие $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$ на $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{c,c_0}(W_n)$. На уровне K_0 получаем представление $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$ на пр-ве Фока $\mathcal{F}_s$ с мультизарядом $s=(s_0,s_1)$. $\mathcal{F}_s=\mathcal{F}_{s_0}\otimes\mathcal{F}_{s_1}$, где $\mathcal{F}_{s_i}$ – пр-во Фока на котором действие $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$ получено покруткой отметок $0,\dots,\ell-1$ вершин в диаграмме Дынкина на s_i. Более явно, определим сдвинутый контент $\mathrm{cont}^s(\square)=s_i+\mathrm{cont}(\square)$, где i – номер диаграммы, где лежит $\square$. Тогда действие $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$ на $\mathcal{F}_s$ равно

$$e_\gamma|\tau\rangle = \sum_{\tau'\sqcup\square=\tau}|\tau'\rangle$$

$$f_\gamma|\tau\rangle = \sum_{\tau''=\tau\sqcup\square}|\tau''\rangle$$ где $\square$ имеет сдвинутый контент $\equiv\gamma \mod \ell$

(и $|\tau\rangle$ – эл-т базиса, соотв. бипартиции τ)

Кроме того, все еще имеем действие $\mathfrak{heis}\curvearrowright\bigoplus_{n=0}^{\infty} D^b(\mathcal{O}_{c,c_0}(W_n))$, которое строится также, как в предыдущей лекции.

2.г) Подсчет количества неприводимых. Как и в прошлой лекции, ${}^{\mathcal{O}}\mathrm{Res}_{W}^{W'} L = 0$ для любого конечномерного представления L. В нашем случае $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$, так что $[L]$ будут аннулироваться E_γ, $\gamma = 0,1,\dots,\ell-1$ и b_{-i}, $i>0$. Отметим, что как $\mathfrak{heis} \times \hat{\mathfrak{sl}}_\ell$-модуль $\mathcal{F}_s$ не является неприводимым.

Т-ма (Вассерот-Шан) [11] Класс конечномерных порождает совместный аннулятор операторов e_γ и b_{-i}.

Мы кратко обсудим основные идеи д-ва, которые можно апгрэйднуть до классификации (Ш.Л 15). А именно, для объекта $M \in \mathcal{O}_c(W)$ мы можем рассмотреть его носитель $\mathrm{Supp}(M)$ как когерентного пучка на $\mathfrak{h}$.

Задача 1: а) $\mathrm{Supp}(M) = W\mathfrak{h}^{W'}$ для единств. (с точн. до сопр.) параб. подгруппы $W' \subset W$.

б) Для $W = W_n$, $W' = S_\ell^p \times W_q \subset W_n$ для нек. p, q $(= p(\tau), q(\tau))$

~~[illegible]~~, Функторы E_γ, F_γ снабжают мн-во $\mathcal{P}_\ell$ стр-ой кристалла, зависящую от $s_0, \dots, s_{\ell-1}$ (определ. сейчас не нужен), а именно $\tilde{e}_\gamma \tau = \tau'$, если $E_\gamma L(\tau) \twoheadrightarrow L(\tau')$ (это определяет τ' однозначно) или $\tilde{e}_\gamma \tau = 0$, если $E_\gamma L(\tau) = 0$. $\tilde{f}_\gamma \tau$ определяется аналогично. Оказывается, что, если $\tilde{e}_\gamma \tau \neq 0$, то $p(\tilde{e}_\gamma \tau) = p(\tau) - 1$. Отсюда следует, что $\mathrm{Span}\{L(\tau) \mid p(\tau) = 0\} =$ синг. векторы для $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$.

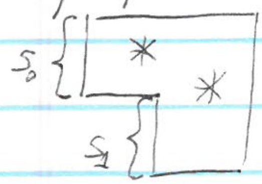
Кроме того, и это более трудный результат принадлежащий Шан-Вассерот: для $p(\tau) = q(\tau) = 0$ (а это соотв. кон. мерному представлению) $\forall \mu \vdash m$ $\exists! \tau'$ т.ч. $B_\mu L(\tau) \twoheadrightarrow L(\tau')$. Это задает биекцию $\{\tau \mid p(\tau) = q(\tau) = 0\} \xrightarrow{\sim} \{\tau \mid p(\tau) = 0\} \times \mathcal{P}_1$, которая позволяет д-ть теорему. Кроме того, эта биекция показывает, что на $\mathcal{P}_\ell$ можно ввести стр-ру $\hat{\mathfrak{sl}}_\infty$-кристалла, который будет соответствовать представлению $\mathfrak{heis}$ и коммутировать с $\hat{\mathfrak{sl}}_\ell$. Её можно вычислить ~~[illegible]~~ комбинаторно, что дает комбинаторный результат классификации конечномерных простых.

3) Связь с $\mathcal{O}_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$.

Категория $\mathcal{O}_{c,c_0}(W_n)$ вкладывается в $\mathcal{O}_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$, точнее в параболическую категорию $\mathcal{O}$ для обобщенной параболической. Это в некотором смысле обобщение конструкции для $\mathcal{O}_c(S_n) \simeq \mathrm{Pol}_n(\dot{U}_\varepsilon) \hookrightarrow \mathrm{KL}_\kappa(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$

А именно, напомним, что $\mathcal{O}_{c,c_0}(W_n)$ зависит от c, s_1-s_0. Мы считаем, что s_1-s_0 целое, т.е. можем предположить, что s_0, s_1 целые и достаточно большие ($>n$). Кроме того, м.сч., что $c=-\frac{1}{d}$ (для $c>0$ остальные категории будут эквивалентны такой с сохранением отметок)

3.1) Осн. теорема. Параболическая категория $\mathcal{O}$, которую мы хотим будет для параболической $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\oplus\mathbb{C}c\oplus t\mathfrak{g}[t]$ ($\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_m$ с $m=s_0+s_1$), где $\mathfrak{p}$ - соответствующая параболическая



Рассмотрим $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}}) = \{M \mid \hat{\mathfrak{p}} \curvearrowright M \text{ лок. кон.}\} \subset \mathcal{O}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ ($\kappa=-e$)

Это Серровская оболочка $L_\kappa(\lambda)$ с $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_{s_0}$, $\lambda_{s_0+1}\geq\lambda_{s_0+2}\geq\ldots\geq\lambda_m$

Обозначим мн-во весов λ с этими св-вами через Λ_{s_0,s_1}, а через $\mathcal{P}_2(n)$ обозначим мн-во бипартиций n. Мы вложим $\mathcal{P}_2(n)\hookrightarrow\Lambda_{s_0,s_1}$ посредством $(\tau^0,\tau^1)\mapsto(\tau^0_1,\ldots,\tau^0_n,0,\ldots,0,\tau^1_1+s_0,\tau^1_2+s_0,\ldots,\tau^1_n+s_0,s_0,\ldots,s_0)$.

Факт: (*) $\tau\leq\tau'$ в $\Lambda_{s_0,s_1}\Longrightarrow\tau^*\leq_{(c,c_0)}\tau'$

~~Рассм. подкатегорию~~ $\mathcal{P}_2(n)$ — идеал по порядку в Λ_{s_0,s_1}.

Поэтому можем рассмотреть старшевесовую подкатегорию $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})_n$ в $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ — Серровскую оболочку $L_\kappa(\tau)$ = [факт 2] = Серровскую оболочку $\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\tau)$, $\tau\in\mathcal{P}_2(n)$

Теорема (гипотеза Вараньоло-Вассеро, д-во Вараньоло-Вассеро-Руке-Шан, (И.Л. Т3)). Имеется эквивалентность $\mathcal{O}_{c,c_0}(W_n)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})_n$ с $\Delta_{c,c_0}(\tau)\mapsto\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\tau)$

В частности мы увидим, что есть фактор-функтор $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})_n\to\mathcal{H}_{q,Q}(n)$-mod

Ниже мы обсудим идеи доказательства, fusion произведения играют очень важную роль. Кроме того, нужен способ проверять эквивалентность категорий со старшим весом, у к-х есть фактор в одну и ту же категорию, к-й "достаточно велик".

3.2) Эквивалентность старшевесовых категорий с общим фактором

Принцип (очень неточный) Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2$ - абелевы категории, эквив. кат-м модулей над конечномерными алгебрами. Пусть $\mathcal{O}^1,\mathcal{O}^2$ - старшевесовые, т.ч. $\mathrm{Irr}(\mathcal{O}^1)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Irr}(\mathcal{O}^2)$ изоморфизм посетов. Пусть $\pi^i:\mathcal{O}^i\twoheadrightarrow\mathcal{C}$ фактор-функторы к-ые достаточно велики (обладают хорошими свойствами отдел полного). Тогда существует эквивалентность $\mathcal{O}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^2$ т.ч. она сплетает π^1, π^2 и тождественна на $Irr(\mathcal{O}^1) = Irr(\mathcal{O}^2)$.

— в таком виде это утверждение о-ть нельзя. Сформулируем более точное, но также бесполезное утверждение

безвред Лемма: Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2, \pi^1, \pi^2$ - как выше. Предположим, что

(1) $\pi^1(\Delta^1(\tau)) = \pi^2(\Delta^2(\tau))$ $\forall \tau \in Irr(\mathcal{O}^i)$

(2) π^1, π^2 строго полные отн Hom и Ext^1 на стандартно фильтрованных объектах (т.е напр. $Ext^1_{\mathcal{O}^1}(M,N) = Ext^1_{\mathcal{C}}(\pi^1 M, \pi^1 N)$ для всех стано фильтр M, N)

Тогда $\exists \varphi: \mathcal{O}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^2$, сплетающ. π^1, π^2 и $\varphi(\Delta^1(\tau)) = \Delta^2(\tau)$

Следствие: ~~...~~ $(1) \,\&\, (2) \Rightarrow \pi^1(P(\tau)) = \pi^2(P(\tau))$; $(2) \Rightarrow \pi^1$ строго полный на проективных.

Проблема с этим утверждением (1), а особенно (2) очень тяжело проверить.

Рукье смог ослабить условия при наличии 1-параметрической деформации, к-ая неупроста в общем тоже (и доказал эквив-ть $\mathcal{O}_c(S_n) \simeq S_q(n,m)\text{-mod}$ для $c \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$

А именно пусть у нас есть категории над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ - эквив категории ~~...~~ $A_\hbar\text{-mod}$, $A_\hbar$ - своб. $\mathbb{C}[[\hbar]]$-модуль кон. ранга $\rightsquigarrow$ ~~...~~ $\mathcal{O}^i_\hbar = \tilde{A}^i_\hbar\text{-mod}$, $\mathcal{C}_\hbar = A_\hbar\text{-mod}$, $\pi^i_\hbar: \mathcal{O}^i_\hbar \to \mathcal{C}_\hbar$ - фактор-функтор

Предположим, что $\pi^i_\hbar$ становится эквив-ю при локализации $\hbar$, и что $A_\hbar[\hbar^{-1}]$ - прямая сумма алгебр матриц. Рассмотрим специализацию $\mathcal{O}^i, \mathcal{C}, \pi^i$ в $\hbar = 0$

Лемма: в этой ситуации есть $Irr(\mathcal{O}^1) \xrightarrow{\sim} Irr(\mathcal{O}^2)$

Заметим, что $Irr(\mathcal{O}^i) \xrightarrow{\sim} Irr(\mathcal{O}^i_{\hbar^{\pm 1}})$ локализация

$L \longrightarrow \Delta^{i,\hbar}_L[\hbar^{-1}]$: $Ext^i(\Delta_L, \Delta_L) = 0, i > 0 \rightsquigarrow$ единств деформ-я $\Delta^\hbar_L$

$\rightsquigarrow$ локализация $\Delta^\hbar_L[\hbar^{-1}]$, эндоморфизмы $\Delta_L : \mathbb{C}$, $\Delta^\hbar_L : \mathbb{C}[[\hbar]]$, $\Delta^{i,\hbar}_L[\hbar^{-1}] : \mathbb{C}((\hbar)) \Rightarrow$ $\Delta^\hbar_L[\hbar^{-1}]$ простой. Из эквив-ти: $\mathcal{O}^1_{\hbar^{\pm 1}} \xrightarrow[\pi^1_{\hbar^{\pm 1}}]{\sim} \mathcal{C}_{\hbar^{\pm 1}} \xleftarrow[\pi^2_{\hbar^{\pm 1}}]{\sim} \mathcal{O}^2_{\hbar^{\pm 1}}$ получаем треб. биекцию ∎

Предположим, что при этом отождествлении $Irr(\mathcal{O}^1) \simeq Irr(\mathcal{O}^2)$ у них есть общий старший вес порядок.

Лемма (Рукье) $\pi^1_\hbar(\Delta^{1,\hbar}_L) = \pi^2_\hbar(\Delta^{2,\hbar}_L)$

Лемма 2 (Рукье) Если π^i строго полны на стандартно-фильтрованных, то $\pi^i_\hbar$ Hom и Ext^1 строго полны на стандартно фильтрованных

Получаем эквив $\mathcal{O}^1_\hbar \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^2_\hbar$, к-ая специализируется в $\mathcal{O}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^2$.

В нашем случае $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}_{c,c_0}(W_n)$. Объясним как строится $\mathcal{O}^1_\hbar$. Рассмотрим общую прямую ℓ через (c,c_0) и формальную окрестность $\ell^\wedge$ точки (c,c_0) на ней. Можем также рассмотреть алгебру $H(W_n)/\mathbb{C}[c,c_0]$ и $H_{\ell^\wedge}(W_n) = \mathbb{C}[[\ell^\wedge]]\otimes_{\mathbb{C}[c_0,c]} H(W_n)$. Для неё можем рассмотреть категорию $\mathcal{O}$: мы требуем чтобы модули были кон. порожд. над $\mathbb{C}[[\ell^\wedge]][\mathfrak{h}]$ (и о.с. $\mathfrak{h}$ лок. нильп.) Это $\mathcal{O}^1_\hbar$.

Проблема с этим - что для аффинной стороны проверить строгую полноту очень сложно. Но можно воспользоваться всякими трюками - рассматривать деформации по всем параметрам, улучшить исходную базовую лемму и т.п.

3.3) Fusion, фактор-функтор и категорные действия

В прошлой лекции мы видели, что $KL_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ - моноидальная категория. На самом деле, для любой параболической $\hat{\mathfrak{p}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ между $\mathfrak{g}[[t]]\oplus\mathbb{C}c$ и $\hat{\mathfrak{b}}$, $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ - модульная категория. А именно, чтобы определить $M\otimes N$ для $M\in KL_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$, $N\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$ мы рассмотрим $\langle N, M, N_\infty\rangle_{\{0,x,\infty\}}$, $x\in\mathbb{C}^\times$, для $N_\infty\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$, и определим $M\otimes N$ как представляющий функтор. Отметим, что у функтора $M\otimes\bullet$ есть автоморфизм приходящий из обхода x вокруг 0.

Положим $V = \Delta^{KL}_\kappa(\mathbb{C}^m)$. Это простой модуль ($\mathbb{C}^m$-минимальный в порядке). Положим $P_n = V^{\otimes n}\otimes\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\varnothing)$. Можно показать, что для $\tau\in\mathcal{P}_2(\kappa) \Rightarrow V\otimes\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\tau)$ фильтрован $\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\tau')$, где $\tau' = \tau\sqcup\square$. Поэтому $P_n\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\kappa(\hat{\mathfrak{g}})$. Более того, из конструкции получаем гомом-м $B_1((\mathbb{C}^\times)^n/S_n)\to End(P_n)$ он пропускается через $\mathcal{H}^{aff}_q(n)$ из-за коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B_1(\mathbb{C}^{n,reg}/S_n) & \longrightarrow & End(V^{\otimes n}) = \mathcal{H}_q(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1((\mathbb{C}^\times)^{n,reg}/S_n) & \longrightarrow & End(P_n) \end{array}$$

Более того $X\in End(V\otimes\Delta^{\mathfrak{p}}_\kappa(\varnothing))$ удовл. $(X-Q_0)(X-Q_1)=0$ (с точн. до ренормализ-и X)

Т.е. имеем гомом-зм $\mathcal{H}_{q,Q}(n) \to End(P_n)$

Предложение: P_n проективен в $\mathcal{O}_k^p(\hat{\mathfrak{g}})_n$, а $End(P_n) = \mathcal{H}_{q,Q}(n)$